

SOBRE EL PROBLEMA DEL ACOPLAMIENTO DE CAMPOS DE ESPINES ALTOS EN DIMENSIÓN $2 + 1$

Rolando Gaitan D.¹

*Tesis Doctoral (Junio 2005), Centro de Física Teórica y Computacional, Facultad
de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas 1041-A, Venezuela.*

Tutor: Dr. Pío J. Arias.

Resumen

Se aborda el problema del acoplamiento de campos de espines altos con un *background* no dinámico, teniéndose particular interés en espacios $2 + 1$ dimensionales. Partiendo de una formulación lagrangiana de campos apropiada, se estudian la causalidad y la conservación del número de grados de libertad locales en una teoría con interacción con campos gravitacionales no dinámicos, verificándose que tal clase de teoría sólo es consistente en ciertos tipos de espacio-tiempo, como los de de (Anti-) Sitter. Por otro lado, se enfoca el problema del acoplamiento del campo gravitacional (ahora como objeto dinámico) con campos materiales como fuentes, desde el punto de vista de una formulación de calibre de tipo Yang-Mills. Allí se encuentran posibles restricciones sobre la forma en cómo se distribuyen los campos materiales, y se muestra que la introducción de campos auxiliares acoplados con la conexión de calibre eliminan las restricciones sobre tales campos materiales. El modelo de la formulación de calibre de la gravedad topológicamente masiva con constante cosmológica, es brevemente discutido, mostrándose que posee una ecuación de campo consistente con la esperada en el límite de torsión nula.

¹e-mail: rgaitan@uc.edu.ve

índice

1) Introducción

2) Teoría Autodual de espín 2 en un espacio-tiempo plano

2.1) La teoría autodual de espín 2 y su análisis Lagrangiano (pág. 12)

2.2) La acción reducida (pág. 15)

2.2.1) El álgebra de operadores en la teoría autodual (pág. 23)

2.2.2) Separación de la parte transversal-sin traza de $h^{(s)}_{\mu\nu}$ (pág. 27)

2.3) Generadores del álgebra de Poincaré (pág. 35)

3) Teoría autodual de espín 2 en espacios de curvatura constante

3.1) Vínculos Lagrangianos en un espacio curvo (pág. 41)

3.2) Teoría autodual en un espacio de dS/AdS (pág. 45)

3.2.1) Acción reducida (pág. 51)

4) Formulación $GL(N, R)$ de calibre de la gravedad

4.1) Teoría libre (pág. 56)

4.1.1) Ecuaciones de campo (pág. 60)

4.2) Acoplamiento con materia (pág. 64)

4.2.1) Inclusión de campos auxiliares (pág. 72)

4.3) La gravedad topológicamente masiva (pág. 77)

4.3.1) Formulación de calibre $GL(3, R)$ topológica masiva (pág. 78)

5) Conclusiones (pág. 82)

6) Apéndices (pág. 87)

Referencias (pág. 98)

1) Introducción

La obtención de una descripción consistente de la interacción con campos de espines altos posee particular importancia ya que nos permitiría establecer un puente entre estos campos y el mundo observable.

El interés por el estudio de campos de espines altos tiene muchos afluentes. Por ejemplo, podemos notar que la teoría de cuerdas incluye una cantidad infinita de excitaciones masivas con todos los espines posibles y por tanto permitiría alguna descripción consistente de la interacción de campos (por ejemplo con un campo electromagnético o gravitacional externos) con espines arbitrarios.

Existe una evidencia a favor de la introducción de la teoría de cuerdas en el problema del acoplamiento [1] como es el caso en que las ecuaciones de movimiento consistentes para el campo masivo de espín 2 puedan ser construidas a partir de una serie infinita de términos en un *background* gravitacional arbitrario. Este tipo de series infinitas aparecen de manera natural en teoría de cuerdas, razón por la cual ésta podría imponerse como una aproximación consistente para la descripción de la interacción de espines altos. En este sentido, existe también un estudio de la propagación consistente de espín 2 con interacción gravitacional [2] que respalda la idea de considerar un conjunto infinito de campos masivos.

Si consideramos la teoría de campos ordinaria, las formulaciones lagrangianas clásicas con interacción para campos de espines altos son conocidas para ciertos espacios. Por ejemplo, muchos autores [3]-[10] han abordado teorías de campos masivos con espines enteros en un espacio-tiempo de curvatura constante, y entre otros [11] se incorporan, además, espacios no Einsteinianos.

Entre las posibles interacciones, la electromagnética ha sido considerada y ha servido de marco para el estudio de muchos modelos. Podemos mencionar la teoría de un campo masivo de espín 2 en un campo electromagnético homogéneo [12] en el contexto de la cuerda bosónica en dimensión $d=26$, y un resultado análogo (pero

en teoría ordinaria de campos) también es obtenido [13]. Hay otro estudio similar para espín 3 [14]. Sin embargo, en este trabajo centraremos nuestra atención en el problema de la interacción con la gravitación.

Entonces, en el contexto de la teoría de campos ordinaria surge la pregunta crucial: *¿qué obstáculos ocurren en la construcción de una teoría consistente de campos de espines altos con interacción externa?*

La razón esencial es que existen por lo menos dos formas mediante las cuales la interacción destruye la consistencia de una teoría de espín alto. Primero, la interacción puede cambiar el número de grados dinámicos de libertad. Por ejemplo, un campo masivo de espín s en un espacio-tiempo Minkowskiano $3+1$ dimensional, está descrito por un tensor simétrico, transverso y sin traza de rango s que satisface las condiciones:

$$(\square - m^2)\phi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_s} = 0, \quad \partial^\mu\phi_{\mu\mu_1\dots\mu_{s-1}} = 0, \quad \phi^\mu_{\mu\mu_1\dots\mu_{s-2}} = 0. \quad (1)$$

En las referencias [15],[16] se muestra que para reproducir estas ecuaciones a partir de un lagrangiano es necesario introducir $s - 1$ campos auxiliares $\chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{s-2}}, \chi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_{s-3}}, \dots, \chi$. Estos campos simétricos y sin traza se anulan en la capa de masas, pero la presencia de ellos en la teoría provee una descripción lagrangiana de las condiciones (1) (en espacios de mayor dimensión aparecen campos con una estructura tensorial más compleja pero la situación general permanece idéntica, esto es, la descripción lagrangiana siempre precisa la presencia de grados de libertad auxiliares no físicos).

La cuestión es, que estos campos auxiliares crean problemas cuando uno trata de hacer aparecer la interacción en la teoría. Una interacción arbitraria hace, en general, que los campos auxiliares se propaguen, modificando el número de grados de libertad locales. Por consiguiente, si se exige la ausencia de estos grados de libertad, entonces aparecerían restricciones adicionales sobre la forma posible de la interacción.

El otro problema que podría surgir en la construcción de teorías de interacción con espines altos es el relacionado con la posible violación de la causalidad, el cual ha sido notado por diversos autores [11],[17]-[19]. La situación consiste en lo siguiente:

consideremos un campo de espín entero descrito mediante un tensor cuyas componentes son ϕ^B (B simboliza un conjunto de índices mixtos) en un espacio N dimensional. Haciendo uso del sistema de vínculos lagrangianos [20] de la teoría con interacción, podemos reescribir las ecuaciones de movimiento (obtenidas a partir de las variaciones sobre la acción $S = \int d^N x \sqrt{-g} L(\phi, \partial\phi)$) de la forma

$$M_{AB}{}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi^B + \dots = 0, \quad \mu, \nu = 0, \dots, N-1. \quad (2)$$

El objeto $M_{AB}{}^{\mu\nu}$ permite definir la *matriz característica*, $M_{AB}(n) \equiv M_{AB}{}^{\mu\nu} n_\mu n_\nu$, que posee como argumento al multivector n_μ de N componentes. La *ecuación característica* correspondiente es $\det M_{AB}(n) = 0$. Las soluciones de ésta definen una hipersuperficie con n_μ normal a la misma. De esto sigue que, si para cualquier n_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$), las posibles componentes $n_0 = n_0(n_i)$ (obtenidas después de despejar n_0 de la ecuación característica) son reales, entonces el sistema de ecuaciones diferenciales (2) es llamado *hiperbólico* y describe un proceso de propagación. Un sistema de ecuaciones hiperbólico es llamado *causal* si la ecuación característica no posee, dentro de las posibles soluciones, vectores tipo tiempo (de lo contrario implicaría que la hipersuperficie ortogonal sería de tipo espacio y por tanto, los puntos de ella estarían conectados de manera no causal). Entonces, la cuestión es que si introducimos interacción en la teoría, la matriz característica $M_{AB}(n)$ se puede modificar de manera tal que la causalidad podría ser violada.

Queremos subrayar que la posible inconsistencia mencionada en la parte anterior, relacionada tanto con la no conservación de los grados de libertad como la violación de la causalidad, y enmarcada en la teoría de campos presupone un espacio-tiempo no dinámico. Desde otro punto de vista podría ser válido preguntarse qué sucedería si el *background* fuese dinámico. En otras palabras, se plantea el problema de la consistencia, considerando al campo gravitacional como un objeto dinámico.

En términos de la teoría de campos, se podrían destacar dos enfoques para explorar el acoplamiento de un campo gravitacional dinámico con campos materiales. Por un lado podría pensarse en agregarle a la densidad lagrangiana de Hilbert-Einstein

una serie de términos lagrangianos de interacción no minimales, construídos mediante contracciones de componentes del tensor de curvatura de Riemann-Christoffel con los campos materiales, al estilo de los términos introducidos, por ejemplo en las referencias [3],[11].

Sin embargo, existe otra corriente, relativamente menos explorada como la de estudiar el acoplamiento de la gravitación con la materia pero desde el punto de vista de una formulación de calibre de la gravedad. El deseo natural de que la gravitación pueda ser tratada, al menos hasta cierto nivel de analogía como una teoría de calibre ha sido un tema considerado por muchos autores [21]-[38]. Esta motivación quizás se ha mantenido esencialmente debido al éxito alcanzado por la teoría de calibre de Yang-Mills [39] en su aplicación al modelo electro-débil [40]-[42], entre otras, con la esperanza de que algo similar ocurriese con la gravitación.

Cuando en general hablamos de formulaciones de calibre de la gravedad nos referimos heurísticamente a construcciones donde este campo esté descrito mediante un conexión sobre cierto fibrado, y que la formulación Lagrangiana sea, por ejemplo del tipo Yang-Mills [25],[38]. Dentro del gran conjunto de propuestas, enfocaremos nuestro interés en la que se fundamenta en el fibrado de referenciales con grupo de calibre $GL(N, R)$ [25],[38], por tener ésta un origen muy intuitivo a partir de los conceptos geométricos involucrados en la Relatividad General.

En definitiva, sea cual sea la formulación de calibre que adoptemos (asumiendo que la naturaleza refleja parte de su funcionamiento de esa manera) se hace necesario tener un esquema consistente para el acoplamiento del campo gravitacional con fuentes materiales, lo cual, de ser posible constituiría un aporte significativo en la verificación y veracidad de tal modelo.

Este trabajo está organizado como sigue. En el Capítulo 2 revisamos la teoría del modelo autodual de espín 2 en un espacio-tiempo plano 2+1 dimensional. Allí, siguiendo el procedimiento para la obtención de la acción reducida, se realiza la discusión de los conmutadores de los operadores mecánico-cuánticos de tal teoría, así como la de los generadores del álgebra de Poincaré. En el Capítulo 3, extendemos la teoría

autodual de espín 2 al caso de un espacio-tiempo curvo, revelando la situación general en la que la preservación del número de grados de libertad es rota. Como caso particular, son estudiados los espacios de dS y AdS, en donde es respetado el número de grados de libertad y la causalidad. Un posible procedimiento, como extensión al usado en el caso plano, para la obtención de la acción reducida en dS/AdS, es implementado.

En el Capítulo 4, exploramos una posible formulación de calibre para la gravitación, basada en la idea del fibrado de referenciales. Comenzando con el caso del vacío cosmológico, se muestra que la consistencia de tal teoría con la formulación de Hilbert-Einstein demanda que la constante cosmológica debe contribuir de manera cuadrática. Seguidamente (sec. 4.2), se discute un posible esquema de acoplamiento no minimal con campos materiales, considerando un espacio $2 + 1$ dimensional como un escenario de prueba sencillo. Allí, mostramos que para evitar las inconsistencias que ocurren entre la dinámica obtenida de esta formulación, comparada con la que se obtiene de la teoría de Hilbert-Einstein, debemos introducir ciertas restricciones sobre los campos materiales. Con la introducción de campos auxiliares, acoplados de manera no minimal con la gravitación, se muestra que es posible eliminar las restricciones sobre los campos materiales. En la sección final (4.4.1), presentamos el modelo de la formulación de calibre de la gravedad topológicamente masiva con constante cosmológica. Allí discutimos su consistencia con el modelo de Deser [65].

2) Teoría Autodual de espín 2 en un espacio-tiempo plano

Los estados de una partícula son especificados por los casimires del álgebra de Poincaré. En dimensión $2 + 1$, el álgebra resulta ser

$$[J^\mu, J^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\lambda} J_\lambda \quad , \quad (3)$$

$$[\mathcal{P}^\mu, J^\nu] = i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \mathcal{P}_\lambda \quad , \quad (4)$$

$$[\mathcal{P}^\mu, \mathcal{P}^\nu] = 0 \quad , \quad (5)$$

donde \mathcal{P}^μ y $J^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{J}_{\nu\lambda}$ son los generadores hermíticos de translaciones y rotaciones de Lorentz, respectivamente. Los casimires correspondientes son \mathcal{P}^2 y $\mathcal{P}^\mu J_\mu$, los cuales actúan sobre estados de una partícula de la forma

$$(\mathcal{P}^2 + m^2)\Psi = 0 \quad , \quad (6)$$

$$(\mathcal{P}^\mu J_\mu + sm)\Psi = 0 \quad . \quad (7)$$

La primer ecuación es la bien conocida condición de capa de masas, mientras que la segunda especifica la helicidad, con s el espín o helicidad de la partícula.

Es conocido que para una partícula masiva con espín 1 se requiere un campo de una componente. Sin embargo, usaremos un objeto (tensor) de tres componentes con la finalidad de abordar una representación lineal del grupo de Lorentz. Este campo debe satisfacer ciertas condiciones subsidiarias con las cuales se eliminen las componentes no requeridas. Si realizamos \mathcal{P}_μ en unidades naturales como $i\partial_\mu$, y $(J_1^\mu)_\lambda{}^\rho \doteq i\epsilon^\mu{}_\lambda{}^\rho$ obtendremos una representación del álgebra de Lie (2.1-2-3) sobre vectores (en general es sabido [43] que la escogencia hecha para $(J_1^\mu)_\lambda{}^\rho$ no es única, pues es posible agregar una parte orbital sin afectar el álgebra de Poincaré). La condición de Pauli-Lubanski será

$$(\mathcal{P} \cdot J + sm)^\mu{}_\lambda V^\lambda = -\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu V_\lambda + smV^\mu = 0 \quad . \quad (8)$$

La condición subsidiaria aparece como una restricción de transversalidad presente en (8)

$$\mathcal{P}_\mu V^\mu = 0 . \quad (9)$$

La otra condición subsidiaria ocurre de la componente temporal de (8) que corresponde a un vínculo.

Pensamos ahora en (8) como la ecuación de movimiento de una teoría de campos. La manera covariante de ver que solamente aparecen las componentes físicas consiste en el formalismo de Proyectores (Apéndice A). En este sentido, la relación (8) es reescrita como

$$[-\square^{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}^+ - \mathbf{P}^-) + sm(\mathbf{P}^+ + \mathbf{P}^-)]\mathbf{V}^T = 0 , \quad (10)$$

donde consideraremos que V^μ puede ser descompuesto como $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T + \mathbf{V}^L$, con $\mathbf{P}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T$, $\mathbf{P}\mathbf{V}^L = 0$. Si miramos a esta ecuación como la proveniente de una teoría con una fuente externa, es inmediato ver que para espín $s = +1$ (-1) habrá un polo masivo para \mathbf{V}^{T+} (\mathbf{V}^{T-}), confirmando el hecho de que solamente hay un grado de libertad con masa m . Si "elevamos al cuadrado" la ecuación (10), la condición de capa de masas es obtenida.

La acción que tiene a (8) como su ecuación de movimiento, es la acción autodual [44]

$$S_{ad}^{(1)} = -\frac{ms}{2} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + sm a_\mu a^\mu) , \quad (11)$$

con $s = \pm 1$. Las teorías autoduales en espacios de dimensión impar han recibido una considerable atención y particularmente, en dimensión $2+1$ son estudiadas debido a su conexión con la física de altas temperaturas en dimensión $3+1$ [45] y con la física de la materia condensada [46],[47].

Otra realización para una partícula masiva de espín 1 masivo es el modelo topológico masivo abeliano

$$S_{TM} = -\frac{1}{4} \int d^3x (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - sm \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu F_{\nu\lambda}) , \quad (12)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ y otra vez $s = \pm 1$. La ecuación de movimiento es ahora

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu {}^*F_\lambda + sm {}^*F^\mu = 0 , \quad (13)$$

donde ${}^*F^\mu$ es el dual de Poincaré de $F^{\mu\nu}$, y la condición subsidiaria $\partial_\mu {}^*F^\mu = 0$ es ahora la identidad de Bianchi asociada con la invariancia de calibre $\delta a_\mu = \partial_\mu \Lambda$. Este hecho (cambiar una ecuación de movimiento por la identidad de Bianchi) es una señal de la dualidad entre ambos modelos, como de hecho lo son [48]-[50].

Si buscamos realizar una teoría de espín 2 masivo, primero tomamos una representación del álgebra de Lie actuando sobre 2-tensores simétricos. Para esto, escogemos

$$(J_2^\mu)^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \doteq \frac{i}{2} (\delta^\alpha_\rho \epsilon^{\beta\mu}_\sigma + \delta^\beta_\rho \epsilon^{\alpha\mu}_\sigma + \delta^\alpha_\sigma \epsilon^{\beta\mu}_\rho + \delta^\beta_\sigma \epsilon^{\alpha\mu}_\rho) , \quad (14)$$

el cual satisface (3). Actuando sobre 2-tensores simétricos, transversos y sin traza (p.ej., $h^{(s)Tt}_{\alpha\beta}$), la condición de Pauli-Lubanski es establecida como

$$(\mathcal{P} \cdot J_2 + sm)^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} h^{(s)Tt\rho\sigma} = 0 . \quad (15)$$

con $s = \pm 2$ y $(sm)^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} = sm \delta^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} = \frac{sm}{2} (\delta^\alpha_\rho \delta^\beta_\sigma + \delta^\beta_\rho \delta^\alpha_\sigma)$. Explícitamente, la ecuación (15) es

$$-\epsilon^{\alpha\lambda}_\rho \partial_\lambda h^{(s)Tt\rho\beta} + \frac{sm}{2} h^{(s)Tt\alpha\beta} = 0 , \quad (16)$$

y puede verse que solo se propaga un modo masivo de los dos presentes en $h^{(s)Tt}_{\alpha\beta}$, cuando es considerada como la ecuación de movimiento de una teoría de campos. Para esto, escribimos (15) en el lenguaje de proyectores usando los proyectores de 2-tensores generales $h_{\alpha\beta}$ como sigue

$$[-\square^{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_+^{(2)} - \mathbf{P}_-^{(2)}) + \frac{sm}{2}(\mathbf{P}_+^{(2)} + \mathbf{P}_-^{(2)})]\mathbf{h}^{Tt} = 0 , \quad (17)$$

y otra vez, como en el caso de espín 1 la propagación solo está asociada a la componente \mathbf{h}^{Tt+} (\mathbf{h}^{Tt-}), si el espín es $s = +2$ ($s = -2$).

Para un tensor general $h_{\mu\nu}$, las ecuaciones que nos conduce a (16) son las de la acción de espín 2 autodual [51]

$$S_{ad}^{(2)} = \frac{m}{2} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} h_{\mu}{}^{\alpha} \partial_{\nu} h_{\lambda\alpha} - m(h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2)) , \quad (18)$$

donde h es la traza del campo.

Para explorar la posibilidad de una formulación métrica de $S_{ad}^{(2)}$ consideremos la descomposición $h_{\mu\nu} = h^{(s)}_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\lambda} V^{\lambda}$, con $h^{(s)}_{\mu\nu} = h^{(s)}_{\nu\mu}$. En este caso (18) es

$$\begin{aligned} S_{ad}^{(2)} = \frac{m}{2} \int d^3x & \left(\epsilon^{\mu\nu\lambda} h^{(s)}_{\mu}{}^{\alpha} \partial_{\nu} h^{(s)}_{\lambda\alpha} - m(h^{(s)}_{\mu\nu} h^{(s)\mu\nu} - h^{(s)2}) \right. \\ & \left. + 2V^{\mu} (\partial_{\mu} h^{(s)} - \partial_{\nu} h^{(s)}{}^{\nu}_{\mu}) - \epsilon^{\mu\nu\lambda} V_{\mu} \partial_{\nu} V_{\lambda} - 2mV_{\mu} V^{\mu} \right) . \end{aligned} \quad (19)$$

Desde un punto de vista dinámico, es posible entender el papel de "eliminador" de espines bajos que juega la parte antisimétrica de $h_{\mu\nu}$, si examinamos las ecuaciones de movimiento que se derivan de la acción (19), es decir

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_{\mu} h^{(s)}_{\nu}{}^{\alpha} + \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_{\mu} h^{(s)}_{\nu}{}^{\lambda} - 2mh^{(s)\lambda\alpha} + 2m\eta^{\lambda\alpha} h^{(s)} + \\ - 2\partial_{\mu} V^{\mu} \eta^{\lambda\alpha} + \partial^{\lambda} V^{\alpha} + \partial^{\alpha} V^{\lambda} = 0 , \end{aligned} \quad (20)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_{\mu} V_{\nu} + 2mV^{\lambda} - \partial^{\lambda} h^{(s)} + \partial_{\mu} h^{(s)\mu\lambda} = 0 . \quad (21)$$

Inmediatamente, podemos ver que la traza y la divergencia de la ecuación (20) proporcionan, respectivamente

$$mh^{(s)} - \partial_{\mu} V^{\mu} = 0 , \quad (22)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_{\nu} \mathcal{H}_{\lambda} - 2m\mathcal{H}^{\mu} + 2m\partial^{\mu} h^{(s)} + \square V^{\mu} - \partial^{\mu} \partial_{\alpha} V^{\alpha} = 0 , \quad (23)$$

donde $\mathcal{H}_{\lambda} \equiv \partial_{\alpha} h^{(s)}_{\lambda}{}^{\alpha}$, es el objeto que representa la propagación de espín 1 del campo autodual simétrico. La relación (22) podría interpretarse, a primera vista como que la propagación de espín cero del campo simétrico es eliminada por la correspondiente al campo antisimétrico, $\partial_{\mu} V^{\mu}$.

Por otro lado, con la ayuda de (23), el "rotacional" de (21) conduce a

$$V_\sigma = 0 , \quad (24)$$

lo cual, junto con (22) nos proporciona la relación suplementaria $h^{(s)} = 0$. Ahora, la ecuación (21) asegura inmediatamente que $\mathcal{H}_\lambda \equiv \partial_\alpha h^{(s)}_\lambda{}^\alpha = 0$, teniéndose una descripción completa y consistente de una propagación de espín 2.

Lo anterior nos dice que la parte antisimétrica del campo autodual juega el rol de eliminar la propagación de la parte de espín 1, \mathcal{H}_λ de $h^{(s)}_{\mu\nu}$. Si no hubiésemos considerado la existencia de V_μ desde el principio, es decir que hubieramos partido con la acción $S_{ad(V_\mu=0)}^{(2)}$, la ecuación de movimiento sería

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu h^{(s)}_\nu{}^\alpha + \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\mu h^{(s)}_\nu{}^\lambda - 2m h^{(s)\lambda\alpha} + 2m \eta^{\lambda\alpha} h^{(s)} = 0 , \quad (25)$$

cuya traza nos indica correctamente que $h^{(s)} = 0$ (no hay propagación de espín cero), pero la divergencia de ésta toma la forma

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu \mathcal{H}_\lambda - 2m \mathcal{H}^\mu = 0 , \quad (26)$$

indicando que propaga espín 1 con masa $2|m|$, y por tanto no habría una interpretación consistente para la propagación de un espín 2 puro.

Así, si pensamos en una formulación métrica para el espín 2 autodual, necesitaremos la presencia de un campo auxiliar que asegure la no propagación de la parte de espín bajo contenida en $h^{(s)}_{\mu\nu}$. Este campo, en este caso puede ser tomado como la parte antisimétrica de $h_{\mu\nu}$ y, por tanto la acción puede ser escrita en la forma compacta (18).

2.1) La teoría autodual de espín 2 y su análisis Lagrangiano

Seguidamente revisaremos el análisis de los vínculos Lagrangianos de la acción autodual de espín 2 [52], cuya acción es (18), con la finalidad de reafirmar que tiene el espectro esperado. Debido a que esta teoría es de primer orden, las ecuaciones

de movimiento que surgen de la extremal de $S_{ad}^{(2)}$ constituyen los nueve vínculos Lagrangianos primarios siguientes

$$E^{\mu\rho} \equiv m \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_\lambda{}^\rho + m^2 (\eta^{\mu\rho} h - h^{\rho\mu}) \approx 0 . \quad (27)$$

Obsérvese que $E^{0\rho}$ no posee derivadas temporales, así que su preservación nos da tres vínculos secundarios. La preservación de $E^{i\rho}$ proporciona las aceleraciones $\ddot{h}_{k\rho}$

$$\ddot{h}_{k\rho} = \partial_k \dot{h}_{0\rho} + m \epsilon_{ik} (\delta^i{}_\rho \dot{h} - \dot{h}_\rho{}^i) , \quad (28)$$

donde $\epsilon^{0ij} \equiv \epsilon^{ij} = \epsilon_{ij}$. La preservación de $E^{0\rho}$ puede verse en la capa de masas como

$$\dot{E}^{0\rho} \approx \partial_\mu E^{\mu\rho} - m \epsilon^{\rho\mu\alpha} E_{\mu\alpha} = -m^3 \epsilon^{\rho\mu\alpha} h_{\mu\alpha} \equiv -m^2 E^\rho \approx 0 , \quad (29)$$

que expresa la propiedad de simetría de $h_{\mu\nu}$. Continuando con el procedimiento, $\dot{E}^\rho \approx 0$ proporciona tres nuevos vínculos

$$\dot{E}^\rho = -m^3 \epsilon^{\rho\mu\alpha} \dot{h}_{\mu\alpha} \approx 0 , \quad (30)$$

de éstos, \dot{E}^i relaciona \dot{h}_{0i} con \dot{h}_{i0} . Si preservamos esta relación obtenemos la aceleración

$$\ddot{h}_{0i} = \ddot{h}_{i0} = \partial_i \dot{h}_{00} + m \epsilon_{ij} \dot{h}_{0j} . \quad (31)$$

Para \dot{E}^0 podemos ver que en la capa de masas nos conduce al vínculo

$$\dot{E}^0 \approx \partial_\mu E^\mu - E^\mu{}_\mu = -2m^4 h \equiv -2m^4 h^{(s)} \approx 0 . \quad (32)$$

Preservando éste, obtenemos un nuevo vínculo que relaciona \dot{h}_{00} con \dot{h}_{ii} . Su posterior preservación, nos permite obtener la aceleración faltante \ddot{h}_{00} , o sea

$$\ddot{h}_{00} = \ddot{h}_{ii} = \partial_i \dot{h}_{0i} + m \epsilon_{ij} \dot{h}_{ij} . \quad (33)$$

Así culmina el procedimiento del análisis de los vínculos Lagrangianos. Se tienen entonces 16 vínculos Lagrangianos representados por $E^{\mu\rho}$, E^ρ , \dot{E}^ρ y $\dot{h}^{(s)}$, indicando

la existencia de solamente una excitación en esta teoría. Es fácil ver que el sistema de vínculos Lagrangianos describe un campos simétrico, transverso y sin traza que satisface la ecuación $(\square - m^2)h^{(s)Tt}_{\mu\nu} = 0$, donde $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = -\partial_0 \partial_0 + \Delta$.

Si el campo autodual es descompuesto como

$$h_{\mu\nu} \equiv h^{(s)}_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\lambda} V^\lambda , \quad (34)$$

podemos tomar $V^\lambda = 0$, $\dot{V}^\lambda = 0$ dejándonos diez vínculos

$$h^{(s)} = 0 , \quad (35)$$

$$\dot{h}^{(s)} = 0 , \quad (36)$$

$$\partial_\mu h^{(s)\mu}_{\nu} = 0 , \quad (37)$$

$$mh^{(s)}_{ii} + \epsilon_{ij} \partial_i h^{(s)}_{0j} = 0 , \quad (38)$$

$$mh^{(s)}_{0i} + \epsilon_{kl} \partial_k h^{(s)}_{li} = 0 , \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}^{(s)}_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \dot{h}^{(s)}_{kk} = \frac{m}{2} (\epsilon_{ik} h^{(s)}_{kj} + \epsilon_{jk} h^{(s)}_{ki}) + \frac{1}{2} (\partial_i h^{(s)}_{0j} + \\ + \partial_j h^{(s)}_{0i} - \delta_{ij} \partial_k h^{(s)}_{0k}) , \end{aligned} \quad (40)$$

que pueden ser resueltos dando

$$h^{(s)}_{00} = \frac{(-\Delta)^2}{m} h^{TT} , \quad (41)$$

$$h^{(s)}_{0i} = -\frac{(-\Delta)}{m} (\epsilon_{ij} \partial_j h^{TT} + \frac{\partial_i}{m} \dot{h}^{TT}) , \quad (42)$$

$$h^{(s)}_{ij} = \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \partial_k \partial_l h^{TT} - \frac{(-\Delta + m^2)}{m^2} \partial_i \partial_j h^{TT} + \frac{1}{m} (\epsilon_{ik} \partial_k \partial_j + \epsilon_{jk} \partial_k \partial_i) \dot{h}^{TT} , \quad (43)$$

en términos de únicamente el campo h^{TT} y su velocidad \dot{h}^{TT} . La aceleración de este campo muestra el carácter masivo de la excitación

$$\ddot{h}^{TT} = -(-\Delta + m^2)h^{TT} . \quad (44)$$

Si extraemos las partes "+" y "-" de este tensor simétrico, transverso y sin traza mediante

$$h^{(s)Tt\pm}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\square^{\frac{1}{2}} \pm m}{\square^{\frac{1}{2}}} \right) h^{(s)}_{\mu\nu} , \quad (45)$$

entonces, en la capa de masas ($\square^{\frac{1}{2}} \sim m$) obtenemos

$$h^{(s)Tt+}_{\mu\nu} = h^{(s)}_{\mu\nu} , \quad h^{(s)Tt-}_{\mu\nu} = 0 . \quad (46)$$

Si cambiamos m por $-m$ en la acción original, los roles de $h^{(s)Tt+}_{\mu\nu}$ and $h^{(s)Tt-}_{\mu\nu}$ se intercambian. De hecho el espín de la excitación (como mostraremos en la sección § 2.3), es $s = 2 \frac{m}{|m|}$.

2.2) La acción reducida

Es bien sabido, que la formulación Hamiltoniana que da pie al procedimiento canónico de cuantización de Dirac pasa por la introducción de la acción de la teoría, que escribimos de una manera genérica como

$$S = \int dt L(\phi^n, \dot{\phi}^n) , \quad (47)$$

donde $L(\phi^n, \dot{\phi}^n)$ es el lagrangiano que toma valores sobre las coordenadas generalizadas ϕ^n , $n = 1, \dots, N$, las cuales eventualmente representarán campos si pensamos en el índice n como un índice compuesto de una parte discreta y otra continua. En (47) convenimos $\dot{\phi}^n \equiv \frac{d\phi^n}{dt}$.

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de la extremal de (47) son

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^n} - \frac{dP_n}{dt} = 0 , \quad (48)$$

donde $P_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^n}$ es el momento canónico conjugado.

El espacio de fase $2N$ dimensional tiene coordenadas generales x^A , $A = 1, \dots, 2N$, y canónicas

$$(\dots, x_{(c)}^A, \dots) = (\phi^1, \dots, \phi^m, \dots, \phi^N, P_1, \dots, P_m, \dots, P_N) \quad , \quad (49)$$

con las cuales se define la estructura de corchetes de Poisson

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \phi^n} \frac{\partial G}{\partial P_n} - \frac{\partial G}{\partial \phi^n} \frac{\partial F}{\partial P_n} \quad , \quad (50)$$

donde F y G son objetos físicos que toman valores sobre las coordenadas de la variedad de fase. Los corchetes de Poisson satisfacen las conocidas relaciones algebraicas

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad , \quad (51)$$

$$\{F, GB\} = \{F, G\}B + G\{F, B\} \quad , \quad (52)$$

$$\{F, \{G, B\}\} + \{G, \{B, F\}\} + \{B, \{F, G\}\} = 0 \quad . \quad (53)$$

Con esta estructura es posible establecer la dinámica de un objeto físico, entendiendo al Hamiltoniano canónico, $H^{(c)}_{(\phi, P)} = P_n \dot{\phi}^n - L(\phi^n, \dot{\phi}^n)$ como el generador de translaciones temporales, es decir $\dot{A} = \{A, H^{(c)}\}$. Esto es realizable de manera consistente con las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{\phi}^n = \{\phi^n, H^{(c)}\} = \frac{\partial H^{(c)}}{\partial P_n} \quad , \quad (54)$$

$$\dot{P}_n = \{P_n, H^{(c)}\} = -\frac{\partial H^{(c)}}{\partial \phi^n} \quad , \quad (55)$$

si implícitamente estamos pensando en un Lagrangiano no singular, donde sea posible despejar todas las velocidades $\dot{\phi}^n$ en términos de las coordenadas y sus momentos conjugados, a partir de la relación $P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^n}$. Aquí surge el obstáculo principal de la

formulación Hamiltoniana: en general no es posible realizar esto último, razón por la cual $P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^n}$ puede conducir a relaciones entre coordenadas y momentos, las cuales reciben el nombre de *vínculos primarios*.

De manera general, un Lagrangiano es identificado como *singular*, verificando la nulidad del determinante de la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\phi}^n \partial \dot{\phi}^m}$. Esto permite escribir los vínculos primarios de la forma $\gamma^{(1)}_k(\phi, P) \approx 0$, $k = 1, \dots, K$, y a partir de éstos extendemos el Hamiltoniano como

$$\tilde{H} = H^{(c)} + u_k \gamma^{(1)}_k, \quad (56)$$

con el cual reestablecemos la dinámica en términos de la estructura de Poisson tomando en cuenta los vínculos, es decir

$$\dot{A} = \{A, \tilde{H}\}|_{\gamma^{(1)}_k \approx 0}. \quad (57)$$

Pero los vínculos primarios, como objetos físicos conservados deben ser consistentes con la dinámica establecida, lo que puede conducir a la aparición de los *vínculos secundarios*, $\gamma^{(2)}_l(\phi, P) \approx 0$, $l = K + 1, \dots, M$. Éstos, como los primarios son sujetos a la consistencia con la dinámica, dándose a lugar todo el proceso de la formulación canónica, muy bien conocido.

Para el procedimiento de Dirac, la distinción fundamental entre los vínculos no es la de primarios o secundarios, sino cuando estos se agrupan en vínculos de *primera clase* y de *segunda clase*. Esto es, los vínculos que "conmutan" y los que "no conmutan", según la estructura de Poisson.

De existir únicamente vínculos de primera clase es posible escoger el camino de la cuantización con estados etiquetados por representantes de las clases de equivalencia (o módulo transformaciones de calibre) de los campos. Pero, eventualmente el análisis de vínculos puede ser cambiado al de un conjunto puro de segunda clase, los cuales denotaremos como $\chi_\alpha \approx 0$, mediante fijaciones de calibre que corresponden a la introducción de nuevos vínculos. Es de observarse que con los vínculos de segunda clase es posible construir una matriz no singular, $C_{\alpha\beta} \equiv \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$, a partir de la cual

son introducidos los corchetes de Dirac de dos objetos físicos

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{-1}_{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} . \quad (58)$$

Estos corchetes permiten obtener finalmente las reglas de conmutación correctas para los vínculos de la teoría, es decir $\{A, \chi_\alpha\}_D = 0$, preparando el paso a una teoría cuántica consistente.

Son numerosos los ejemplos en los que el procedimiento de cuantización canónica de Dirac conlleva a un proceso tedioso, dentro de los cuales, la teoría autodual de espín 2, no es la excepción [53]. Sin embargo, existe una aproximación al problema de la obtención del álgebra de corchetes de Dirac (e inmediatamente de los conmutadores de los operadores mecánico-cuánticos), que, hablando superficialmente parte de la obtención de la acción reducida de la teoría. En nuestro problema de interés (la teoría autodual), esto significa "reducir" la teoría a una acción correspondiente a un solo grado de libertad.

La posibilidad de realizar este tipo de procedimiento está garantizada por el teorema de Maskawa y Nakajima [54] que asegura la existencia de una transformación canónica de las coordenadas x^A , de tal manera que los corchetes de Dirac definidos en la variedad de los puntos del espacio de fase son iguales a los corchetes de Poisson (*inducidos*) de la subvariedad de las variables reducidas sin vínculos.

Ahora bien, la posibilidad de reducir el problema al de la subvariedad del espacio de fase o, como llamaremos *superficie de vínculos*, es un hecho intrínsecamente asociado a la geometría simpléctica del espacio de fase. Seguidamente, revisaremos a rasgos generales algunos de los elementos de esta geometría [55] que justifican la afirmación anterior, así como la introducción del concepto de acción reducida.

Además de considerarse que el espacio de fase está dotado con coordenadas x^A y una estructura de Poisson (50)-(53), se introduce un tensor antisimétrico no singular de rango 2, llamado *2-forma simpléctica*

$$\sigma^{AB} \equiv \{x^A, x^B\} , \quad (59)$$

con las siguientes propiedades

$$\det(\sigma^{AB}) \neq 0 \quad (invertible), \quad (60)$$

$$\partial_C \sigma_{AB} + \partial_A \sigma_{BC} + \partial_B \sigma_{CA} = 0 \quad (forma\ cerrada), \quad (61)$$

con $\sigma^{AB} \sigma_{BC} = \delta^A_C$. Si F y G toman valores en las coordenadas del espacio de fase, podemos reescribir (50) de la forma

$$\{F, G\} = \sigma^{AB} \frac{\partial F}{\partial x^A} \frac{\partial G}{\partial x^B} . \quad (62)$$

Seguidamente, consideramos secciones del espacio de fase, aludiendo a las superficies de vínculos (de primera o segunda clase) que ocurren tras imponer los vínculos. A estas subvariedades se les puede proporcionar una *2-forma inducida*, σ_{ij} debido a σ_{AB} . Considerando que tales superficies de vínculos poseen ecuaciones paramétricas denotadas por $x^A = x^A(y^i)$, con y^i ($i = 1, \dots, 2N - M$) las coordenadas de la superficie de vínculos, la 2-forma inducida es

$$\sigma_{ij} = \sigma_{AB} \frac{\partial x^A}{\partial y^i} \frac{\partial x^B}{\partial y^j} , \quad (63)$$

la cual hereda la propiedad de antisimetría y la identidad de Bianchi (p.ej.: forma cerrada).

A diferencia de σ^{AB} , la definición (63) no garantiza que $\det(\sigma_{ij}) \neq 0$, razón por la cual en general la 2-forma inducida no sea invertible. Esto representa un serio obstáculo para poder definir la *estructura de corchetes de Poisson inducida*, que tiene la forma

$$\{f, g\}^* = \sigma^{ij} \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial y^j} , \quad (64)$$

donde f y g toman valores sobre los puntos de la superficie de vínculos.

Esta situación ocurre (como ejemplo extremo) en el caso de una superficie puramente de vínculos de primera clase, $\gamma_a \approx 0$ (con, $\{\gamma_a, \gamma_b\} \approx 0$, $a, b = 1, \dots, M$), y que

pensaremos por simplicidad que éstos son independientes (caso irreducible). Entendiendo que los vínculos de primera clase revelan el carácter invariante de calibre de la teoría, es ampliamente demostrado [55] que la 2-forma inducida es singular (de hecho maximalmente degenerada) ya que existen M vectores linealmente independientes definidos con las funciones vínculos de la forma

$$X^A{}_a \equiv \sigma^{AB} \partial_B \gamma_a \quad , \quad (65)$$

que son vectores nulos de la 2-forma simpléctica, pues

$$0 \approx \{\gamma_a, \gamma_b\} = \sigma^{AB} \partial_A \gamma_a \partial_B \gamma_b = \sigma_{AB} X^A{}_a X^B{}_b \quad . \quad (66)$$

Los vectores $X^A{}_a$ también reciben el nombre de *vectores Hamiltonianos*.

Considerando (62) y (65), y sea F una función de las coordenadas del espacio de fase, se tiene

$$\partial_a F \equiv X^A{}_a \partial_A F = \{F, \gamma_a\} \quad , \quad (67)$$

indicando que los M vectores $X^A{}_a$ generan la transformaciones infinitesimales de calibre. Esto ayuda a mostrar que estos vectores son tangentes a la subvariedad de la superficie de vínculos primarios:

$$X^A{}_a \partial_A \gamma_b = \{\gamma_b, \gamma_a\} \approx 0 \quad , \quad (68)$$

y más aún, con la condición de integrabilidad de Frobenius (lema del teorema de Frobenius), esto es " $\{X^A{}_a, X^B{}_b\} = \text{combinación de vectores Hamiltonianos en la superficie de vínculos}$ ", se garantiza que los vectores $X^A{}_a$ generan una subvariedad M -dimensional, o superficie nula (llamada también así, pues éstos son vectores nulos de la 2-forma simpléctica). Debido a que los vectores $X^A{}_a$ generan las transformaciones de calibre via (67), éstas superficies también son llamadas *órbitas de calibre*. Entonces, la forma de recuperar la invertibilidad de σ_{ij} en el contexto de una teoría con vínculos de primera clase, y con vistas a obtener una estructura de Poisson inducida bien definida, es la de definir un *espacio de fase reducido* como el espacio cociente

entre la superficie de vínculos primarios y las órbitas de calibre (p.ej.: identificación de los puntos de una órbita de calibre).

En el caso opuesto, es decir cuando el sistema de vínculos es puramente de segunda clase, $\chi_\alpha \approx 0$, $\alpha = 1, \dots, M$, la discusión es más simple ya que no hay órbitas de calibre. En este tipo de sistemas la invertibilidad de la 2-forma inducida está garantizada ya que los vectores Hamiltonianos definidos con las funciones vínculos

$$X^A{}_\alpha \equiv \sigma^{AB} \partial_B \chi_\alpha \quad , \quad (69)$$

no son vectores nulos de la 2-forma simpléctica, pues

$$\sigma_{AB} X^A{}_\alpha X^B{}_\beta = \sigma^{AB} \partial_A \chi_\alpha \partial_B \chi_\beta = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \neq 0 \quad , \quad (70)$$

por lo cual, la 2-forma inducida es no degenerada. Así, la estructura de Poisson inducida está bien definida en la superficie de vínculos secundarios (pudiese haber un caso mixto, es decir con vínculos de primera y segunda clase donde el procedimiento consiste en reducir el espacio de fase con las órbitas de calibre correspondientes a los vínculos de primera clase, quedando ahora un problema de vínculos de segunda clase solamente).

Para finalizar esta muy breve revisión de ideas, podemos resaltar que existen dos aplicaciones inmediatas de lo anteriormente discutido, las cuales utilizaremos en buena parte de este trabajo, enfocando nuestra atención en sistemas de segunda clase. Por un lado, se puede probar un teorema [55],[56] que establece: "*Los corchetes de Dirac asociados a los vínculos de segunda clase, $\chi_\alpha \approx 0$ son iguales a los corchetes de Poisson inducidos en la superficie de estos vínculos*

$$\{F, G\}_D |_{\chi_\alpha \approx 0} = \{f, g\}^* \quad , \quad (71)$$

donde $F |_{\chi_\alpha \approx 0} = f$ y $G |_{\chi_\alpha \approx 0} = g$ ". Lo cual es un hecho sumamente poderoso a la hora de calcular (de manera indirecta) los corchetes de Dirac.

Por otro lado, si la acción de la teoría con vínculos de segunda clase es escrita como

$$S = \int dt (P_n \dot{\phi}^n - H^{(c)} - u^\alpha \chi_\alpha) \quad , \quad (72)$$

es posible evaluarla sobre la superficie de los vínculos $\chi_\alpha \approx 0$, con las ecuaciones paramétricas $x^A = x^A(y^i)$ y $x^A \equiv (\phi^n, P_n)$. Para esto se escoge la 1-forma

$$\rho_A \equiv (P_n, 0) \quad , \quad (73)$$

con lo cual, la parte cinética de (72) es reescrita como

$$P_n \dot{\phi}^n = \rho_A(x) \dot{x}^A \quad . \quad (74)$$

La 1-forma inducida es entonces

$$\rho_i(y) = \frac{\partial x^A}{\partial y^i} \rho_A(x(y)) \equiv \frac{\partial x^n}{\partial y^i} P_n(x(y)) \quad . \quad (75)$$

De esto sigue una expresión para la parte cinética en términos de la 1-forma inducida

$$\rho_i \dot{y}^i = \frac{\partial x^n}{\partial y^i} P_n \dot{y}^i = P_n \dot{x}^n \equiv P_n \dot{\phi}^n \quad . \quad (76)$$

Si además consideramos

$$H^{(c)}|_{\chi_\alpha=0} = h(y) \quad , \quad (77)$$

entonces, esta expresión junto con (76) nos permiten decir

$$S[y(t)] \equiv S|_{\chi_\alpha=0} = \int dt (\rho_i \dot{y}^i - h(y)) \quad . \quad (78)$$

Seguidamente, examinamos la variación de $S|_{\chi_\alpha=0}$ en las coordenadas y^i , obteniéndose

$$\delta_y S[y(t)] = \int dt \left(\left(\frac{\partial \rho_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \rho_i}{\partial y^j} \right) \dot{y}^j - \frac{\partial h}{\partial y^i} \right) \delta y^i \quad , \quad (79)$$

a menos de un término de borde. Por el lema de Poincaré podemos pensar $\frac{\partial \rho_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \rho_i}{\partial y^j}$ como una 2-forma local, con lo cual decimos que si la 2-forma inducida tiene a ρ_j como la 1-forma de potencial, entonces se propone

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \rho_j}{\partial y^i} - \frac{\partial \rho_i}{\partial y^j} \quad . \quad (80)$$

Con esta prescripción local, reescribimos la variación (79) como

$$\delta_y S[y(t)] = \int dt \sigma_{ij} (\dot{y}^j - \{y^j, h\}^*) \delta y^i \quad , \quad (81)$$

con la ayuda de la definición de los corchetes de Poisson inducidos (64). Inmediatamente podemos ver que la extremal de $S[y(t)]$ conduce a

$$\dot{y}^j = \{y^j, h\}^* \quad , \quad (82)$$

que son las ecuaciones de Hamilton sin vínculos en la superficie $\chi_\alpha \approx 0$. Con esto se dice que hemos resuelto los vínculos dentro de la acción y la expresión (78) recibirá el nombre de acción reducida.

2.2.1) El álgebra de operadores en la teoría autodual

Con vistas a obtener la acción reducida de la teoría autodual de espín 2, se puede comenzar mirando la descomposición 2+1 de la acción de la teoría del campo autodual de espín 2, ec.(18) en un espacio plano

$$\begin{aligned} S_{ad}^{(2)} = & \frac{m}{2} \int d^3x \{ -\epsilon_{ij} \dot{N}_i N_j + \dot{h}^{(s)}{}_{ik} (\epsilon_{ij} h^{(s)}{}_{jk} - \delta_{ik} V) + \dot{V} h^{(s)}{}_{kk} + \\ & + m(h^{(s)2} - h^{(s)}{}_{ij} h^{(s)}{}_{ij} + 2V^2) - 2n(mh^{(s)}{}_{kk} + \epsilon_{ij} \partial_i N_j) + \\ & + 2M_k (\epsilon_{ij} \partial_i h^{(s)}{}_{jk} - \partial_k V + mN_k) \} \quad , \end{aligned} \quad (83)$$

donde hemos hecho uso de la notación [57]

$$n \equiv h_{00} \quad , \quad (84)$$

$$N_i \equiv h_{i0} \quad , \quad (85)$$

$$M_i \equiv h_{0i} \quad , \quad (86)$$

$$h^{(s)}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}) , \quad (87)$$

$$V \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ij} h_{ij} . \quad (88)$$

Seguidamente, realizamos la descomposición transverso-longitudinal (TL) mediante

$$N_i \equiv \epsilon_{ik} \partial_k N^T + \partial_i N^L , \quad (89)$$

$$M_i \equiv \epsilon_{ik} \partial_k M^T + \partial_i M^L , \quad (90)$$

$$h^{(s)}_{ij} \equiv (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) h^{(s)TT} + \partial_i \partial_j h^{(s)LL} + (\epsilon_{ik} \partial_k \partial_j + \epsilon_{jk} \partial_k \partial_i) h^{(s)TL} , \quad (91)$$

con la cual reescribimos la acción (83) como

$$\begin{aligned} S_{ad}^{(2)} = m \int d^3x \{ & \dot{N}^T \Delta N^L + (\Delta h^{(s)LL} - \Delta h^{(s)TT}) \Delta \dot{h}^{(s)TL} - V \Delta \dot{h}^{(s)LL} + \\ & - V \Delta \dot{h}^{(s)TT} + m[\Delta h^{(s)TT} \Delta h^{(s)LL} - (\Delta h^{(s)TL})^2 + V^2] + \\ & + n[\Delta N^T - m \Delta h^{(s)LL} - m \Delta h^{(s)TT}] + M^T[\Delta^2 h^{(s)TT} - m \Delta N^T] + \\ & + M^L[\Delta^2 h^{(s)TL} + \Delta V - m \Delta N^L] \} , \quad (92) \end{aligned}$$

donde los campos n , M^T y M^L aparecen como multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos

$$\Delta N^T - m \Delta h^{(s)LL} - m \Delta h^{(s)TT} = 0 , \quad (93)$$

$$\Delta^2 h^{(s)TT} - m \Delta N^T = 0 , \quad (94)$$

$$\Delta^2 h^{(s)TL} + \Delta V - m \Delta N^L = 0 . \quad (95)$$

Con la finalidad de obtener la acción reducida, uno puede comenzar restringiéndose al espacio físico de los vínculos (93)-(95), lo cual permite escribir la acción en términos de los campos $h^{(s)TT}$, $h^{(s)TL}$ y V , es decir

$$\begin{aligned} S_{ad}^{(2)*} = \int d^3x \{ & 2m \Delta^2 h^{(s)TL} \dot{h}^{(s)TT} + \Delta h^{(s)TT} (\Delta - m^2) \Delta h^{(s)TT} + \\ & - m^2 (\Delta h^{(s)TL})^2 + m V^2 \} , \quad (96) \end{aligned}$$

de la cual puede observarse que el campo V no propaga en el espacio físico (p.ej., su ecuación es $V = 0$). Con esto, e introduciendo la notación

$$P \equiv \sqrt{2} m \Delta h^{(s)TL} , \quad (97)$$

$$Q \equiv \sqrt{2} \Delta h^{(s)TT} , \quad (98)$$

se observa que la acción reducida posee la forma canónica

$$S_{ad}^{(2)*} = \int d^3x \{ P \dot{Q} - \frac{1}{2} P^2 - \frac{1}{2} Q (-\Delta + m^2) Q \} , \quad (99)$$

mostrando claramente que la teoría propaga un solo grado de libertad y la energía es positiva definida.

Esto nos permite considerar, en primer lugar que todos los campos físicos pueden ser expresados en términos de las variables canónicas Q y P . Para esto, mostramos las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de la acción (92)

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta h^{(s)TT}} = 0 \implies \dot{V} = mn + \Delta(\dot{h}^{(s)TL} - M^T - m h^{(s)LL}) , \quad (100)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta h^{(s)LL}} = 0 \implies \dot{V} = mn - \Delta(\dot{h}^{(s)TL} + m h^{(s)TT}) , \quad (101)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta h^{(s)TL}} = 0 \implies \dot{h}^{(s)TT} - \dot{h}^{(s)LL} + M^L - 2m h^{(s)TL} = 0 , \quad (102)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta V} = 0 \implies V = \frac{1}{2m} \Delta(\dot{h}^{(s)TT} + \dot{h}^{(s)LL} - M^L) , \quad (103)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta n} = 0 \implies N^T = m(h^{(s)TT} + h^{(s)LL}) , \quad (104)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta M^T} = 0 \implies N^T = \frac{1}{m} \Delta h^{(s)TT} , \quad (105)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta M^L} = 0 \implies N^L = \frac{1}{m} V + \frac{1}{m} \Delta h^{(s)TL} , \quad (106)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta N^L} = 0 \implies \dot{N}^T = m M^L , \quad (107)$$

$$\frac{\delta S_{ad}^{(2)}}{\delta N^T} = 0 \implies \dot{N}^L = n - m M^T , \quad (108)$$

y usando las definiciones (97) y (98) obtenemos

$$V = 0 , \quad (109)$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2} m^2} \Delta Q , \quad (110)$$

$$N^T = \frac{1}{\sqrt{2} m} Q , \quad (111)$$

$$N^L = \frac{1}{\sqrt{2} m^2} P , \quad (112)$$

$$M^T = \frac{1}{\sqrt{2} m} Q , \quad (113)$$

$$M^L = \frac{1}{\sqrt{2} m^2} P , \quad (114)$$

$$h^{(s)LL} = \frac{1}{\sqrt{2} m^2} (\Delta - m^2) \Delta^{-1} Q . \quad (115)$$

Con esto y la ayuda de (84)-(91), todas las componentes del campo auto-dual, $h_{\mu\nu}$ pueden ser escritas en función de las variables Q y P . La forma (99) de la acción reducida sugiere que las variables Q y P son canónicamente conjugadas, razón por la cual, toda vez que promovamos la formulación cuántica de la teoría autodual, postulamos la regla fundamental de conmutación entre operadores

$$[Q(x), P(y)]_{t'=t} = i \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (116)$$

A partir de esta regla, los conmutadores a tiempos iguales no nulos son

$$\begin{aligned} [h_{i0}(x), h_{jk}(y)] &= [h_{0i}(x), h_{jk}(y)] = \frac{i}{2m^2} \{ p^{(m)}_{ij} \partial_k + p^{(m)}_{ik} \partial_j + \\ &\quad - p^{(m)}_{jk} \partial_i \} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) , \end{aligned} \quad (117)$$

$$[h_{i0}(x), h_{00}(y)] = [h_{0i}(x), h_{00}(y)] = \frac{i}{2m^4} \partial_i(-\Delta) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (118)$$

$$\begin{aligned} [h_{i0}(x), h_{0k}(y)] &= [h_{i0}(x), h_{k0}(y)] = [h_{0i}(x), h_{k0}(y)] = \\ &= \frac{i \epsilon_{ik}}{2m^3} (-\Delta) \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) , \end{aligned} \quad (119)$$

$$[h_{00}(x), h_{ij}(y)] = \frac{i}{2m} \{ \epsilon_{ki} p^{(m)}_{kj} + \epsilon_{kj} p^{(m)}_{ki} \} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (120)$$

$$\begin{aligned} [h_{ij}(x), h_{kl}(y)] &= \frac{i}{4m} \{ \epsilon_{ik} p^{(m)}_{jl} + \epsilon_{jk} p^{(m)}_{il} + \epsilon_{il} p^{(m)}_{jk} + \\ &\quad + \epsilon_{jl} p^{(m)}_{ik} \} \delta^2(\vec{x} - \vec{y}) , \end{aligned} \quad (121)$$

donde $p^{(m)}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{m^2}$ es un proyector transverso en la capa de masas tiempo constante, $\Delta - m^2 = 0$. El álgebra obtenida usando la acción reducida será la misma que se obtiene si se procede siguiendo estrictamente el procedimiento de cuantización de Dirac debido a que los corchetes de Dirac en la variedad de los vínculos coinciden con los de Poisson en el espacio de las variables reducidas, según lo discutido en la sección 2.2.

2.2.2) Separación de la parte transversal-sin traza de $h^{(s)}_{\mu\nu}$

En la sección anterior estudiamos la construcción de la acción reducida mediante la separación en partes transversales y longitudinales de los campos, inmediatamente después de realizarse la descomposición $2 + 1$ de la acción original. Ahora, queremos mostrar la equivalencia de la construcción anterior con el procedimiento equivalente, que se fundamenta en la extracción de la parte transversal-sin traza (Tt) del campo autodual simétrico, que más adelante llamaremos $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$.

Para esto, comenzamos por descomponer el campo $h_{\mu\nu}$ en su parte simétrica ($h^{(s)}_{\mu\nu}$) y antisimétrica (V^λ) como en (34)

$$h_{\mu\nu} \equiv h^{(s)}_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\lambda} V^\lambda , \quad (122)$$

y sustituyendo esta definición en (18), se obtiene la ya conocida (19)

$$S_{ad}^{(2)} = \frac{m}{2} \int d^3x \left(\epsilon^{\mu\nu\lambda} h^{(s)}_{\mu}{}^{\alpha} \partial_{\nu} h^{(s)}_{\lambda\alpha} - m(h^{(s)}_{\mu\nu} h^{(s)\mu\nu} - h^{(s)2}) + \right. \\ \left. + 2V^{\mu}(\partial_{\mu} h^{(s)} - \partial_{\nu} h^{(s)}_{\mu}{}^{\nu}) - \epsilon^{\mu\nu\lambda} V_{\mu} \partial_{\nu} V_{\lambda} - 2mV_{\mu} V^{\mu} \right) . \quad (123)$$

Seguidamente, introducimos una descomposición en la que aislamos la parte Tt de $h^{(s)}_{\mu\nu}$, y además exhibiendo las componentes de espines bajos

$$h^{(s)}_{\mu\nu} \equiv h^{(s)Tt}_{\mu\nu} + \partial_{\mu} a^T_{\nu} + \partial_{\nu} a^T_{\mu} + \partial_{\mu} \partial_{\nu} \phi + \eta_{\mu\nu} \psi , \quad (124)$$

con las condiciones suplementarias

$$h^{(s)Tt}_{\mu}{}^{\mu} = 0 , \quad (125)$$

$$\partial^{\mu} h^{(s)Tt}_{\mu\nu} = 0 , \quad (126)$$

$$\partial_{\mu} a^{T\mu} = 0 . \quad (127)$$

Además, también descomponemos la parte de antisimétrica en sus componentes de espín 1 y 0

$$V_{\mu} \equiv V^T_{\mu} + \partial_{\mu} V , \quad (128)$$

con

$$\partial_{\mu} V^{T\mu} = 0 . \quad (129)$$

Usando (124) y (128) en (123) se obtiene

$$S_{ad}^{(2)} = \frac{m}{2} \int d^3x \left(\epsilon^{\mu\nu\lambda} h^{(s)Tt}_{\mu}{}^{\alpha} \partial_{\nu} h^{(s)Tt}_{\lambda\alpha} - m h^{(s)Tt}_{\mu\nu} h^{(s)Tt\mu\nu} + \right. \\ \left. - \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_{\nu} a^T_{\lambda} \square a^T_{\mu} + 2m a^{T\mu} \square a^T_{\mu} - 2V^{T\nu} \square a^T_{\nu} + \right. \\ \left. - \epsilon^{\mu\nu\lambda} V^T_{\mu} \partial_{\nu} V^T_{\lambda} - 2m V^{T\mu} V^T_{\mu} + 2m V \square V + \right. \\ \left. + 4m \psi \square \phi + 6m \psi^2 - 4\psi \square V \right) . \quad (130)$$

Ahora examinamos las ecuaciones de movimiento que resultan de la extremal de la acción $\delta S_{ad}^{(2)}$ cuando realizamos variaciones independientes en los campos $h^{(s)Tt}_{\lambda\alpha}$, a^T_ν , V^T_ν , V , ϕ y ψ , respectivamente

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu h^{(s)Tt}_\nu{}^\alpha + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu h^{(s)Tt}_\nu{}^\lambda - 2mh^{(s)Tt\lambda\alpha} = 0 , \quad (131)$$

$$- \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu \square a^T_\nu + 2m\square a^{T\lambda} - \square V^{T\lambda} = 0 , \quad (132)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu V^T_\nu + 2mV^{T\lambda} + \square a^{T\lambda} = 0 , \quad (133)$$

$$m\square V - \square\psi = 0 , \quad (134)$$

$$\square\psi = 0 , \quad (135)$$

$$m\square\phi - \square V + 3m\psi = 0 . \quad (136)$$

Es de observarse, que alternativamente se podrían introducir la función tensorial F_1^α y las funciones escalares, F_2 y F_3 , arbitrarias y derivables, de tal manera que las ecuaciones (131)-(133) fuesen reemplazadas por

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu h^{(s)Tt}_\nu{}^\alpha + \epsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu h^{(s)Tt}_\nu{}^\lambda - 2mh^{(s)Tt\lambda\alpha} = \partial^\lambda F_1^\alpha + \partial^\alpha F_1^\lambda , \quad (137)$$

$$- \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu \square a^T_\nu + 2m\square a^{T\lambda} - \square V^{T\lambda} = \partial^\lambda F_2 , \quad (138)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\mu V^T_\nu + 2mV^{T\lambda} + \square a^{T\lambda} = \partial^\lambda F_3 , \quad (139)$$

y además que los objetos introducidos deben satisfacer las condiciones de consistencia

$$\square F_1^\lambda = 0 , \quad \partial_\lambda F_1^\lambda = 0 , \quad (140)$$

$$\square F_2 = 0 , \quad (141)$$

$$\square F_3 = 0 . \quad (142)$$

Entonces, las relaciones (140)-(142) nos sugieren que puede recuperarse el sistema (131)-(133) si removemos las soluciones armónicas de las funciones introducidas. Así, asumimos el sistema de ecuaciones (131)-(136).

las ecuaciones (134)-(136) pueden ser reescritas como

$$3\psi + \square\phi = 0 , \quad (143)$$

$$\square V = 0 , \quad (144)$$

$$\square\psi = 0 . \quad (145)$$

La ecuación (143) indica que $h_{\mu\nu}$ no propaga espín 0, pues garantiza que $h^{(s)}_{\mu}{}^{\mu} = 0$. Por otro lado, (144) nos muestra que la parte antisimétrica del campo auto-dual, V_{μ} no propaga espín 0 masivo, de igual manera con ψ . Con esto, si extraemos las soluciones armónicas, tendremos

$$\phi = 0 , \quad (146)$$

$$V = 0 , \quad (147)$$

$$\psi = 0 . \quad (148)$$

Las ecuaciones (132) y (133) se pueden desacoplar de forma que

$$V^T_{\nu} = 0 , \quad (149)$$

$$\square a^T_{\nu} = 0 , \quad (150)$$

y a menos de soluciones armónicas, tenemos

$$a^T_{\nu} = 0 . \quad (151)$$

Entonces, con la ayuda de (147) y (149) vemos que (128) nos dice que la parte antisimétrica del campo autodual no propaga, o sea

$$V_{\nu} = 0 , \quad (152)$$

estableciendo que $h_{\lambda\alpha} = h^{(s)}_{\lambda\alpha}$. Pero, más aún, las relaciones (146), (148) y (151) en (124) nos permiten asegurar

$$h_{\mu\nu} = h^{(s)Tt}_{\mu\nu} , \quad (153)$$

obteniéndose una descripción consistente de una propagación de espín 2 pura.

La extracción de armónicos ha sido un procedimiento expedito para establecer la relación (153), y podría enfocarse de manera relacionada con el hecho de que para poder definir el operador \square^{-1} (el cual pudiera haber sido introducido desde el principio, a nivel de la descomposición (124)), no deban considerarse las soluciones en ondas planas con $p_\mu p^\mu = 0$, donde dicho operador no es regular. En nuestra discusión no hemos seguido este camino, ya que necesitamos un procedimiento que evite en la medida de lo posible la definición de potencias distintas de la unidad del D'Alembertiano, teniendo ésto serios inconvenientes en espacios no-Minkowskianos.

En resumidas cuentas, el procedimiento de separación de la parte simétrico-tranverso sin traza, aquí discutido está respaldado por el hecho de que si hubiésemos partido de la acción decompuesta según las partes simétrica-antisimétrica, ec.(123), se hubiera encontrado que el espacio de fase reducido es aquél con $V_\mu = 0$ y el campo simétrico satisfaciendo las condiciones suplementarias $h^{(s)}_{\mu}{}^{\mu} = 0$ y $\partial^\mu h^{(s)}_{\mu\nu} = 0$.

Con todo esto, podemos decir que hemos conseguido una descripción consistente del campo autodual que propaga espín 2 y que está descrito por $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$. Entoces, la ecuación (131) que describe dinámicamente a este campo, la podemos reescribir como

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu h^{(s)Tt}_{\nu}{}^{\alpha} - m h^{(s)Tt\lambda\alpha} = 0 , \quad (154)$$

gracias a la propiedad de transversalidad. Partiendo de (154) se puede obtener la forma hiperbólica-causal de tipo "Klein-Gordon", esto es

$$(\square - m^2) h^{(s)Tt}_{\mu\nu} = 0 . \quad (155)$$

De los dos campos libres representados por $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$, se puede mostrar que solo se propaga un grado de libertad. Para esto, se puede retomar la definición (45) de las

partes "+" y "-" [51],[57], reescrita como

$$h^{(s)Tt}_{\mu\nu}{}^{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} \pm \delta^{\alpha}_{\mu}\epsilon_{\nu}{}^{\sigma\beta} \frac{\partial_{\sigma}}{\square^{\frac{1}{2}}})h^{(s)Tt}_{\alpha\beta} , \quad (156)$$

y la ecuación (155) en la capa de masas equivale a

$$(\square - m^2)h^{(s)Tt}_{\mu\nu}{}^{+} = 0 , \quad (157)$$

$$h^{(s)Tt}_{\mu\nu}{}^{-} = 0 . \quad (158)$$

Así, con las condiciones ya establecidas, podemos escribir la acción reducida en términos exclusivos de la propagación de espín 2, representada por la parte simétrica-transversa-sin traza del campo autodual

$$S_{ad}^{(2)*} = \frac{m}{2} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} h^{(s)Tt}_{\mu}{}^{\alpha} \partial_{\nu} h^{(s)Tt}_{\lambda\alpha} - m h^{(s)Tt}_{\mu\nu} h^{(s)Tt\mu\nu}) , \quad (159)$$

y su descomposición 2 + 1 es

$$\begin{aligned} S_{ad}^{(2)*} = \frac{m}{2} \int d^3x (& -2\epsilon^{ij} h^{(s)Tt}_{00} \partial_i h^{(s)Tt}_{j0} + 2\epsilon^{ij} h^{(s)Tt}_{k0} \partial_i h^{(s)Tt}_{jk} + \\ & + \epsilon^{ij} h^{(s)Tt}_{i0} \dot{h}^{(s)Tt}_{j0} - \epsilon^{ij} h^{(s)Tt}_{ik} \dot{h}^{(s)Tt}_{jk} - m(h^{(s)Tt}_{00})^2 + \\ & + 2m h^{(s)Tt}_{0k} h^{(s)Tt}_{0k} - m h^{(s)Tt}_{ij} h^{(s)Tt}_{ij}) . \end{aligned} \quad (160)$$

Seguidamente introducimos una forma general TL para las diferentes componentes de $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$

$$h^{(s)Tt}_{00} \equiv \Phi , \quad (161)$$

$$h^{(s)Tt}_{0i} \equiv \epsilon_{ik} \partial_k u^T + \partial_i u^L , \quad (162)$$

$$h^{(s)Tt}_{ij} \equiv (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) \phi^{TT} + \partial_i \partial_j \phi^{LL} + (\epsilon_{ik} \partial_k \partial_j + \epsilon_{jk} \partial_k \partial_i) \phi^{TL} . \quad (163)$$

Las propiedades Tt del campo, (125) y (126) establecen las siguientes condiciones

$$\Phi = \Delta(\phi^{TT} + \phi^{LL}) , \quad (164)$$

$$\dot{u}^L = \Delta \phi^{LL} , \quad (165)$$

$$\dot{u}^T = \Delta \phi^{TL} , \quad (166)$$

$$\dot{\Phi} = \Delta u^L , \quad (167)$$

con las cuales podemos reescribir las definiciones (161)-(163) como

$$h^{(s)Tt}_{00} \equiv \Phi , \quad (168)$$

$$h^{(s)Tt}_{0i} \equiv \epsilon_{ik} \partial_k u^T - \partial_i (-\Delta)^{-1} \dot{\Phi} , \quad (169)$$

$$h^{(s)Tt}_{ij} \equiv (\delta_{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) (-\Delta)^{-2} \square \Phi + \partial_i \partial_j (-\Delta)^{-2} \ddot{\Phi} - (\epsilon_{ik} \partial_k \partial_j + \epsilon_{jk} \partial_k \partial_i) (-\Delta)^{-1} \dot{u}^T . \quad (170)$$

Ahora la acción reducida 2 + 1, ec.(160) es

$$\begin{aligned} S_{ad}^{(2)*} = m \int d^3x & \left(2\Phi \Delta u^T - 4u^T \ddot{\Phi} - 2(-\Delta)^{-1} \dot{u}^T \ddot{\Phi} - m\Phi^2 + \right. \\ & \left. - mu^T \Delta u^T + 2m\dot{\Phi} (-\Delta)^{-1} \dot{\Phi} - m\ddot{\Phi} (-\Delta)^{-2} \ddot{\Phi} - m(\dot{u}^T)^2 \right) . \end{aligned} \quad (171)$$

Introduciendo la variable

$$\Psi \equiv \Phi + (-\Delta)^{-1} \ddot{\Phi} \equiv -(-\Delta)^{-1} \square \Phi , \quad (172)$$

la acción reducida toma la forma compacta

$$S_{ad}^{(2)*} = m \int d^3x \left((2\Psi - mu^T) \square u^T - m\Psi^2 \right) , \quad (173)$$

con las ecuaciones de movimiento

$$\square u^T - m\Psi = 0 , \quad (174)$$

$$\square(\Psi - mu^T) = 0 . \quad (175)$$

Usando estas ecuaciones se puede mostrar que la acción reducida es también $S_{sd}^{(2)*} = \int d^3x \Psi (\square - m^2) \Psi$.

Entonces, uno puede introducir una definición para el grado de libertad y su momento canónico conjugado

$$Q \equiv \sqrt{2} \Psi , \quad (176)$$

$$P \equiv \sqrt{2} m \dot{u}^T , \quad (177)$$

de manera que la acción (173) toma la forma canónica esperada (p.ej.: $\int d^3x (P\dot{Q} - \frac{P^2}{2} - \frac{1}{2}Q(-\Delta + m^2)Q)$), mostrándose que a nivel clásico las descomposiciones TL y Tt describen el mismo grado de libertad propagado. Más aún, siguiendo el programa que parte de sustituir los campos por sus operadores mecánico-cuánticos y la incorporación de la regla de conmutación fundamental (116), es posible promover la mencionada equivalencia a nivel cuántico. El primer paso consiste en reescribir las definiciones (168)-(170) en términos del grado de libertad Q y su momento canónico conjugado P con la ayuda de (176) y (177):

$$h^{(s)Tt}_{00} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \square^{-1}(-\Delta)Q , \quad (178)$$

$$h^{(s)Tt}_{0i} = \frac{1}{\sqrt{2}m} \epsilon_{ik} \partial_k Q + \frac{1}{\sqrt{2}} \square^{-1} \partial_i P , \quad (179)$$

$$\begin{aligned} h^{(s)Tt}_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{ij} Q + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i \partial_j (-\Delta)^{-1} Q + \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_i \partial_j \square^{-1} Q + \\ &+ \frac{m^2}{\sqrt{2}} \partial_i \partial_j (-\Delta)^{-1} \square^{-1} Q - \frac{1}{\sqrt{2}m} (\epsilon_{ik} \partial_k \partial_j + \epsilon_{jk} \partial_k \partial_i) (-\Delta)^{-1} P . \end{aligned} \quad (180)$$

Entonces, según la regla $[Q(x), P(y)]_{t'=t} = i\delta^2(\vec{x} - \vec{y})$ se puede mostrar que en la capa de masas, los conmutadores entre las diferentes componentes de $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$ recuperan el álgebra (117)-(121). Esto muestra la equivalencia cuántica entre las formulaciones TL y Tt.

2.3) Generadores del álgebra de Poincaré

La consistencia de una teoría cuántica de campo relativista pasa por la obtención explícita de los operadores mecánico-cuánticos \mathcal{P}^μ y $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, que satisfacen el álgebra de Poincaré (3)-(5).

Con la finalidad de construir los generadores del álgebra de Poincaré en términos de las variables fundamentales "Q" y "P", comenzamos determinando el tensor momento-energía de Belinfante, $T^{\alpha\beta}$ asociado al campo autodual. Así, extendemos la definición de la acción autodual al caso en que el espacio-tiempo está provisto de una métrica general, $g_{\mu\nu}$ y coordenadas curvilíneas

$$S_{adg}^{(2)} = \frac{m}{2} \int d^3x \sqrt{-g} (\varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu{}^\alpha \nabla_\nu h_{\lambda\alpha} - m(h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2)) , \quad (181)$$

donde ∇_ν es la derivada covariante y $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \equiv \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}}{\sqrt{-g}}$ es el tensor de Levi-Civita. Esta generalización no incluye términos de acoplamiento no minimales con la gravedad debido a que nuestro interés ahora está enfocado en el límite plano de $T^{\alpha\beta}$.

Entonces, el tensor momento-energía simétrico en el espacio-tiempo plano es

$$T^{\alpha\beta} = \left[\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}} \right]_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = \frac{m^2}{2} (h^{\sigma\alpha} h^\beta{}_\sigma + h^{\sigma\beta} h^\alpha{}_\sigma - h h^{\alpha\beta} - h h^{\beta\alpha} + \\ - \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} + \eta^{\alpha\beta} h^2) - \frac{1}{2} (\partial_\sigma t^{\alpha\beta\sigma} + h_\sigma{}^\alpha E^{\sigma\beta} + h_\sigma{}^\beta E^{\sigma\alpha}) , \quad (182)$$

donde $t^{\alpha\beta\sigma} \equiv m\epsilon^{\mu\alpha\nu} h_\mu{}^\beta h_\nu{}^\sigma + m\epsilon^{\mu\beta\nu} h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\sigma$ y $E^{\mu\rho} \equiv m\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_\lambda{}^\rho + m^2(\eta^{\mu\rho} h - h^{\rho\mu})$, como en ec.(27).

Con la ayuda de la descomposición TL discutida en (89)-(91), puede observarse que en el espacio físico de los campos (esto es $E^{\mu\rho} = 0$), los generadores de translaciones (temporal y espaciales) son equivalentes al caso del campo escalar. En efecto, el Hamiltoniano y el momentum vienen dados por

$$\mathcal{H} = \int d^2x \{ m^2 (-\Delta h^{(s)TL})^2 - \Delta h^{(s)TT} (-\Delta + m^2) (-\Delta) h^{(s)TT} \} \\ = \frac{1}{2} \int d^2x \{ (\dot{Q})^2 + \partial_i Q \partial_i Q + m^2 Q^2 \} , \quad (183)$$

$$\mathcal{P}^i = -2m \int d^2x (-\Delta) h^{(s)TL} \partial_i (-\Delta) h^{(s)TT} = - \int d^2x \dot{Q} \partial_i Q . \quad (184)$$

De manera idéntica ocurre con los generadores de rotaciones $\mathcal{J}^{ij} = \epsilon^{ij} \mathcal{J} = \int d^2x \{x^i T^{0j} - x^j T^{0i}\}$, donde

$$\mathcal{J} \equiv -2m \int d^2x (-\Delta) h^{(s)TL} \epsilon^{ij} x^i \partial_j (-\Delta) h^{(s)TT} = - \int d^2x \dot{Q} \epsilon^{ij} x^i \partial_j Q . \quad (185)$$

Esta coincidencia con el caso de un campo escalar ocurre debido a que en dos dimensiones espaciales, las rotaciones están descritas por el grupo $O(2)$, el cual no requiere de un espín definido. Sin embargo, la contribución del espín aparece cuando los generadores de *boosts* de Lorentz, $\mathcal{J}^{i0} = \int d^2x \{x^i T^{00} - x^0 T^{0i}\}$ son calculados

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{i0} &= \int d^2x x^i \{m^2 (-\Delta h^{(s)TL})^2 - (-\Delta) h^{(s)TT} (-\Delta + m^2) \Delta h^{(s)TT}\} - x^0 \mathcal{P}^i + \\ &\quad - 4m^2 \int d^2x (-\Delta) h^{(s)TL} \epsilon^{ij} \partial_j h^{(s)TT} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x x^i \{(\dot{Q})^2 + \partial_i Q \partial_i Q + m^2 Q^2\} - x^0 \mathcal{P}^i - 2m \epsilon^{ij} \int d^2x \dot{Q} \frac{\partial_j}{-\Delta} Q , \end{aligned} \quad (186)$$

donde se puede observar la contribución de un término singular infrarrojo, el cual dice que el campo $Q(x)$ no transforma como un escalar, como era de esperarse. Este término singular, como veremos inmediatamente, representa la contribución del espín de la teoría.

Para remover la singularidad infrarroja recurrimos al bien conocido procedimiento sobre la interpretación de la contribución de espín [58], que parte con la expansión en ondas planas considerando operadores creación-aniquilación

$$Q(x) = \int \frac{d^2k}{2\pi \sqrt{2w(\mathbf{k})}} \{e^{-iKx} a(\mathbf{k}) + e^{iKx} a^+(\mathbf{k})\} . \quad (187)$$

con $K = (w(\mathbf{k}), \mathbf{k})$, $w(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ y $[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. Con esto, los generadores de translaciones y rotaciones son

$$\mathcal{P}^\mu = \int d^2k k^\mu a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) , \quad (188)$$

$$\mathcal{J}^{ij} = \int d^2k a^+(\mathbf{k}) \frac{\epsilon^{ij}}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} a(\mathbf{k}) , \quad (189)$$

donde $k_1 \tan \theta = k_2$, con $\theta \in [0, 2\pi)$ el ángulo polar en el plano 2-dimensional de momentos. En esta representación, los generadores de *boosts* de Lorentz también exhiben la singularidad infrarroja

$$\mathcal{J}^{i0} = \frac{i}{2} \int d^2k w(\mathbf{k}) \{a^+(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\partial}_i a(\mathbf{k})\} - 2m \int d^2k \frac{\epsilon^{ij} k^j}{\mathbf{k}^2} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) , \quad (190)$$

donde $a^+(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\partial}_i a(\mathbf{k}) \equiv a^+(\mathbf{k}) \partial_i a(\mathbf{k}) - a(\mathbf{k}) \partial_i a^+(\mathbf{k})$.

Seguidamente, realizamos una transformación de fase en los operadores creación-aniquilación

$$a(\mathbf{k}) \longrightarrow e^{is \frac{m}{|m|} \theta} a(\mathbf{k}) , \quad (191)$$

siendo s un parámetro real desconocido. El mapa (191) está bien definido debido a que es posible fijar un dominio en el cual es invertible (p. ej., $\theta \in [0, \frac{2\pi}{s} \frac{m}{|m|})$).

Los generadores de translaciones y las relaciones de conmutación de a y a^+ permanecen invariantes bajo (191), pero los generadores de *boosts* y rotaciones son ahora

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{J}}^{i0} = & \frac{i}{2} \int d^2k w(\mathbf{k}) \{a^+(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\partial}_i a(\mathbf{k})\} + 2 \frac{m}{|m|} \int d^2k \frac{\epsilon^{ij} k^j}{w(\mathbf{k}) + |m|} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \\ & + (s - 2) \frac{m}{|m|} \int d^2k w(\mathbf{k}) \frac{\epsilon^{ij} k^j}{\mathbf{k}^2} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) , \end{aligned} \quad (192)$$

$$\overline{\mathcal{J}}^{ij} = \int d^2k a^+(\mathbf{k}) \frac{\epsilon^{ij}}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} a(\mathbf{k}) + s \frac{m}{|m|} \int d^2k \epsilon^{ij} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) . \quad (193)$$

Inmediatamente podemos ver que la singularidad infrarroja es removida, si y solo si se fija el valor $s = 2$ para el parámetro libre. Más aún, el valor del espín $2 \frac{m}{|m|}$ es recuperado, y su sensibilidad bajo cambios de signo de la masa reflejan la helicidad de la excitación propagada. Desde el punto de vista Lagrangiano, esta expresión de

la helicidad proviene del signo del término de masa lineal de la acción (18), y sea cual sea el caso, tal signo no afecta al Hamiltoniano, como uno puede deducir directamente de la transformada de Legendre de la acción reducida (99).

En el estudio de la teoría autodual de espín 2 hemos mostrado que la formulación de la acción reducida constituye una herramienta poderosa para la construcción de la teoría cuántica correspondiente, evitando el extenuante procedimiento canónico de Dirac. Más aún, el formalismo reducido que describe la excitación masiva propagada, permite prácticamente de manera directa determinar la contribución de espín que establece el comportamiento no escalar del grado de libertad. Allí observamos que es posible evitar la singularidad infrarroja mediante una transformación de fase en los operadores creación-aniquilación.

Finalmente, si se desea confirmar el comportamiento relativista consistente de la teoría, se debe verificar que los generadores obtenidos satisfagan el álgebra de Poincaré. Si consideramos los generadores obtenidos antes de realizar la transformación de fase (191), es decir los objetos (188) y (189) puede mostrarse que el álgebra de Poincaré es satisfecha con excepción del álgebra de los generadores de *boosts* debido a la singularidad infrarroja, y la cual exhibe una "anomalía", es decir

$$i[\mathcal{J}^{i0}, \mathcal{J}^{j0}] = \epsilon^{ij}(\mathcal{J} - \mathcal{A}) , \quad (194)$$

donde $\mathcal{A} \equiv -2m \int d^2k w(\mathbf{k}) \partial_i f^i(\vec{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$ con $f^i(\vec{k}) = \frac{k^i}{\mathbf{k}^2}$ una función singular en el origen. En (194), el término "anomalía" representa el hecho de la asociación entre la única excitación propagada del campo autodual y la correspondiente al caso de un campo escalar, debido a que ésta analogía solo es aparente hasta el momento en que los generadores de *boosts* de lorentz son involucrados. Es obvio que tal "anomalía" deba aparecer pues de lo contrario el grado de libertad estudiado sería simplemente de tipo escalar.

Sin embargo, lo interesante está en que luego de realizar la transformación de fase sobre los operadores creación-aniquilación se puede volver a calcular el álgebra de los

boosts, obteniéndose

$$i[\overline{\mathcal{J}}^{i0}, \overline{\mathcal{J}}^{j0}]_{s=2} = \epsilon^{ij}(\mathcal{J} - 2\frac{m}{|m|} \int d^2k a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k})) = \epsilon^{ij} \overline{\mathcal{J}}_{s=2} , \quad (195)$$

con lo cual uno puede decir que ha removido la "anomalía", satisfaciéndose el álgebra de Poincaré. Es de subrayarse que la teoría autodual planteada en (18) es invariante relativista por construcción, razón por la cual la anomalía discutida es solo una expresión de la singularidad infrarroja y no de alguna inconsistencia intrínseca en el carácter covariante de la misma.

3) Teoría autodual de espín 2 en espacios de curvatura constante

Como mencionáramos al principio de este trabajo, en el contexto de la teoría de campos ordinaria, entre otras ha habido un gran interés sobre el estudio lagrangiano de campos de espín alto con interacción externa. Tales teorías son solo conocidas bajo cierto régimen de acoplamiento, ya sean de origen electromagnético, gravitacional, entre otros. En el contexto de la interacción gravitacional, diversos autores han considerado espacios de curvatura constante [1]-[11], hasta de tipo no-Einsteinianos [11].

La razón fundamental de lo anterior, insistimos es que no existe una teoría de campos general consistente de espines altos con interacción como consecuencia de la no conservación de los grados de libertad y la violación de la causalidad. El primer hecho relacionado con la posibilidad de que los campos auxiliares propaguen grados de libertad cuando aparece una interacción arbitraria, y el segundo con que la ecuación de movimiento pudiera describir propagaciones no causales.

Con respecto a la posible violación de la causalidad, basaremos nuestra discusión con la siguiente nomenclatura [11]. Enfocando nuestro interés en campos con espín entero, $h_{\alpha_1\alpha_2\dots}$, en términos generales es posible obtener ecuaciones de movimiento de una formulación lagrangiana dada, las cuales pueden ser establecidas como $(\mathcal{M}_{\beta_1\dots\alpha_1\dots})^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu h^{\alpha_1\dots} + \dots = 0$, con la ayuda de los vínculos lagrangianos. Seguidamente, sean n_μ las componentes de vectores, entonces la matriz característica es definida mediante $\mathcal{M}_{AB}(n) \equiv \mathcal{M}_{AB}{}^{\mu\nu}n_\mu n_\nu$, donde A, B son índices compuestos. La ecuación característica es $\det \mathcal{M}_{AB}(n) = 0$, cuyas soluciones definen superficies características que describen los posibles procesos de propagación. Si la solución de la ecuación característica proporciona un n_0 real, el sistema de ecuaciones de movimiento se llama hiperbólico. Un sistema hiperbólico se llama causal si no hay vectores tipo tiempo dentro de las soluciones de la ecuación característica (de lo contrario, si

hay vectores tipo tiempo, las superficies características correspondientes son de tipo espacio, con lo cual sus puntos estarían conectados por procesos superluminales y se violaría la causalidad).

Entonces, cuando una interacción externa arbitraria es introducida, la matriz característica, $\mathcal{M}_{AB}(n)$ no necesariamente define un sistema de ecuaciones hiperbólico-causal.

Aquí, estaremos interesados en estudiar los aspectos cruciales ya mencionados (conservación de los grados de libertad y causalidad), haciendo énfasis en la formulación lagrangiana de la teoría del campo autodual de espín 2 acoplado con la gravitación. En este sentido, serán discutidas las restricciones físicas que proporcionan consistencia a la teoría, que no solo se traducen en condiciones sobre el campo gravitacional (p.ej., espacios de curvatura constante), si no también en restricciones sobre los posibles valores permitidos de los parámetros asociados a la masa.

3.1) Vínculos Lagrangianos en un espacio curvo

Comenzamos por presentar el modelo autodual acoplado no minimalmente con gravedad. Para esto, introducimos la interacción gravitacional mediante un conjunto general de términos de acoplamiento no minimales en la formulación Lagrangiana, contruidos a partir del tensor de Ricci y sus contracciones, ya que en 2+1 dimensiones éste describe completamente a la curvatura de Riemann (Apéndice B). Entonces, en un espacio Riemanniano nuestro modelo es [59]

$$S_{adg}^{(2)} = \int \frac{d^3x}{2} \sqrt{-g} (m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu{}^\alpha \nabla_\nu h_{\lambda\alpha} + \Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} h_{\alpha\beta} h_{\sigma\lambda}) , \quad (196)$$

donde ∇_ν es la derivada covariante definida con los símbolos de Christoffel y $\varepsilon^{\mu\nu\lambda} \equiv \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda}}{\sqrt{-g}}$. Debido al hecho de que en un espacio-tiempo 2 + 1 dimensional el tensor conformal de Weyl es idénticamente nulo, el tensor de curvatura de Riemann puede ser escrito en términos exclusivos de el de Ricci (p.ej.: $R_{\lambda\mu\nu\rho} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho}R_{\lambda\nu} - \frac{R}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})$), el acoplamiento no minimal en la acción (196)

está caracterizado por el tensor $\Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda}$, cuyo aspecto más general es

$$\begin{aligned}\Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} \equiv & m^2(g^{\sigma\lambda}g^{\alpha\beta} - g^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda}) + a_1(R^{\sigma\lambda}g^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}g^{\sigma\lambda}) + \\ & + a_2(R^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda} + R^{\alpha\lambda}g^{\sigma\beta}) + a_3R^{\alpha\sigma}g^{\beta\lambda} + a_4R^{\beta\lambda}g^{\alpha\sigma} + \\ & + a_5Rg^{\alpha\beta}g^{\sigma\lambda} + a_6Rg^{\sigma\beta}g^{\alpha\lambda} + a_7Rg^{\lambda\beta}g^{\sigma\alpha} ,\end{aligned}\quad (197)$$

con la propiedad $\Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} = \Omega^{\sigma\lambda\alpha\beta}$ y los parámetros reales, a_n ($n = 1, \dots, 7$) libres.

Entonces, tomando variaciones arbitrarias del campo autodual, la extremal de la acción S_{adg} provee las siguientes ecuaciones de campo (nueve vínculos primarios)

$$\Phi^{(1)\mu\alpha} \equiv m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu h_\lambda^\alpha + \Omega^{\mu\alpha\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda} \approx 0 . \quad (198)$$

Tres vínculos más aparecen cuando $\Phi^{(1)0\rho} \approx 0$ es preservado

$$\Phi^{(2)\alpha} \approx \nabla_\mu \Phi^{(1)\mu\alpha} \equiv \Omega^{\mu\alpha\sigma\lambda} \nabla_\mu h_{\sigma\lambda} + \mathcal{B}^{\alpha\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda} \approx 0 , \quad (199)$$

donde se ha definido el objeto

$$\mathcal{B}^{\alpha\sigma\lambda} \equiv \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} (R^{\alpha\lambda}{}_{\nu\mu} \delta^\sigma{}_\rho - R^\sigma{}_{\rho\nu\mu} g^{\alpha\lambda}) + \nabla_\mu \Omega^{\mu\alpha\sigma\lambda} . \quad (200)$$

Por otro lado, la conservación de $\Phi^{(1)k\alpha} \approx 0$ conduce a seis relaciones para las aceleraciones (como en el caso plano, aquí es demandado $m \neq 0$)

$$\begin{aligned}\nabla_0^2 h_j^\alpha = & -\frac{\bar{\varepsilon}_{kj}}{m} \Omega^{k\alpha\sigma\lambda} \nabla_0 h_{\sigma\lambda} - \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{kj}}{m} \nabla_0 \Omega^{k\alpha\sigma\lambda} + R^\sigma{}_{0j0} g^{\alpha\lambda} \right) h_{\sigma\lambda} + \\ & + \nabla_j \nabla_0 h_0^\alpha + R^{\alpha\lambda}{}_{j0} h_{0\lambda} ,\end{aligned}\quad (201)$$

donde la notación significa $\bar{\varepsilon}_{\sigma\lambda} \equiv \varepsilon_{0\sigma\lambda}$, quedando aún por determinarse las aceleraciones, $\nabla_0^2 h_{0\lambda}$.

Hasta este punto, el análisis Lagrangiano con los parámetros de acoplamiento libres, en un espacio-tiempo arbitrario es equivalente al caso plano. Sin embargo, siguiendo el siguiente paso, se puede notar con la ayuda de (201), que la preservación

de $\Phi^{(2)\alpha} \approx 0$ toma la forma

$$\begin{aligned}
\Phi^{(3)\alpha} \equiv \nabla_0 \Phi^{(2)\alpha} \approx & \Omega^{0\alpha 0\lambda} \nabla_0^2 h_{0\lambda} + (\Omega^{0\alpha j\lambda} + \Omega^{j\alpha 0\lambda}) \nabla_j \nabla_0 h_{0\lambda} + \\
& + \left(-\frac{\bar{\varepsilon}_{kl}}{m} \Omega^{0\alpha l\rho} \Omega^{\mu\lambda k}{}_{\rho} + \nabla_0 \Omega^{0\alpha\mu\lambda} + \mathcal{B}^{\alpha\mu\lambda} \right) \nabla_0 h_{\mu\lambda} + \\
& + \left[-\frac{\bar{\varepsilon}_{kl}}{m} \Omega^{0\alpha l\rho} \nabla_0 \Omega^{\mu\lambda k}{}_{\rho} - \Omega^{0\alpha l\lambda} R^\mu{}_{0l0} + \nabla_0 \mathcal{B}^{\alpha\mu\lambda} + \right. \\
& \left. - \Omega^{\nu\alpha\mu\rho} R^\lambda{}_{\rho\nu 0} - \Omega^{\sigma\alpha\nu\lambda} R^\mu{}_{\nu\sigma 0} \right] h_{\mu\lambda} - \Omega^{0\alpha l\rho} R^\lambda{}_{\rho l 0} h_{0\lambda} + \\
& + \nabla_0 \Omega^{i\alpha\mu\lambda} \nabla_i h_{\mu\lambda} + \Omega^{i\alpha j\lambda} \nabla_i \nabla_0 h_{j\lambda} \approx 0 , \tag{202}
\end{aligned}$$

con la esperanza de que represente tres nuevos vínculos, de manera equivalente al caso plano. Esto significa que de la expresión (202) no deba ser imposible obtener ninguna relación para las aceleraciones $\nabla_0^2 h_{0\lambda}$, aún no resueltas. Debido a que (202) constituye un sistema completo para las mencionadas aceleraciones, exigiremos que todas las matrices 3×3 , 2×2 y 1×1 construidas $\Omega^{0\alpha 0\lambda}$, tengan determinante nulo (p.ej.: $\Omega^{0\alpha 0\lambda}$ es totalmente degenerada) para garantizar la imposibilidad de despejar $\nabla_0^2 h_{0\lambda}$. Esta condición significa

$$\Omega^{0\alpha 0\lambda} = 0 , \tag{203}$$

la cual al ser usada en (197), proporciona las siguientes restricciones sobre los parámetros de acoplamiento

$$a_1 = -a_2 \equiv a , \quad a_6 = -a_5 \equiv b , \quad a_3 = a_4 = a_7 = 0 , \tag{204}$$

quedando solo dos de ellos libres. Entonces, el tensor (197) es ahora

$$\begin{aligned}
\Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} = & a (R^{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} + R^{\sigma\lambda} g^{\alpha\beta} - R^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} - R^{\beta\sigma} g^{\alpha\lambda}) + \\
& + (m^2 - bR)(g^{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} - g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma}) , \tag{205}
\end{aligned}$$

con las propiedades de simetría

$$\Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} = \Omega^{\sigma\lambda\alpha\beta} = -\Omega^{\alpha\lambda\sigma\beta} . \tag{206}$$

Con esto, el objeto $\mathcal{B}^{\alpha\sigma\lambda}$, dado por (200) puede ser reescrito en términos del tensor de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R$ (apéndice B), exhibiendo la propiedad antisimétrica respecto a los índices $\alpha\lambda$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\alpha\sigma\lambda} = & m \varepsilon^{\alpha\lambda\beta} G^\sigma{}_\beta - (a - 2b)(g^{\sigma\lambda}\nabla^\alpha G - g^{\sigma\alpha}\nabla^\lambda G) + \\ & + a \varepsilon^{\alpha\lambda}{}_\nu \varepsilon^{\mu\sigma\beta} \nabla_\mu G^\nu{}_\beta = -\mathcal{B}^{\lambda\sigma\alpha} . \end{aligned} \quad (207)$$

Entonces, con la ayuda de (205) se pueden escribir los tres vínculos $\Phi^{(3)\alpha} \equiv \nabla_0 \Phi^{(2)\alpha} \approx 0$, de la manera

$$\begin{aligned} \Phi^{(3)\alpha} = & \mathcal{N}^{\alpha\lambda} \nabla_0 h_{0\lambda} + \nabla_0 \Omega^{i\alpha 0\lambda} \nabla_i h_{0\lambda} + \mathcal{A}^{\alpha\lambda} h_{0\lambda} + \Omega^{i\alpha j\lambda} \nabla_i \nabla_0 h_{j\lambda} \\ & + \mathcal{C}^{\alpha j\lambda} \nabla_0 h_{j\lambda} + \nabla_0 \Omega^{i\alpha j\lambda} \nabla_i h_{j\lambda} + \mathcal{D}^{\alpha j\lambda} h_{j\lambda} \approx 0 , \end{aligned} \quad (208)$$

donde hemos definido

$$\mathcal{N}^{\alpha\lambda} \equiv \frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_{kl} \Omega^{0\alpha k\rho} \Omega^{0\lambda l}{}_\rho + \mathcal{B}^{\alpha 0\lambda} = -\mathcal{N}^{\lambda\alpha} , \quad (209)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\alpha\lambda} \equiv & -\frac{1}{m} \Omega^{0\alpha l\rho} (\bar{\varepsilon}_{kl} \nabla_0 \Omega^{0\lambda k}{}_\rho + m R^\lambda{}_{\rho l 0} + m R^0{}_{0 l 0} \delta^\lambda{}_\rho) \\ & + \nabla_0 \mathcal{B}^{\alpha 0\lambda} - \Omega^{\mu\alpha 0\rho} R^\lambda{}_{\rho\mu 0} - \Omega^{\mu\alpha\nu\lambda} R^0{}_{\nu\mu 0} , \end{aligned} \quad (210)$$

$$\mathcal{C}^{\alpha j\lambda} \equiv -\frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_{kl} \Omega^{0\alpha l\rho} \Omega^{j\lambda k}{}_\rho + \mathcal{B}^{\alpha j\lambda} + \nabla_0 \Omega^{0\alpha j\lambda} , \quad (211)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\alpha j\lambda} \equiv & -\frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_{kl} \Omega^{0\alpha l\rho} \nabla_0 \Omega^{j\lambda k}{}_\rho + \nabla_0 \mathcal{B}^{\alpha j\lambda} - \Omega^{\mu\alpha j\rho} R^\lambda{}_{\rho\mu 0} \\ & - \Omega^{\mu\alpha\nu\lambda} R^j{}_{\nu\mu 0} - \Omega^{0\alpha l\lambda} R^j{}_{0 l 0} . \end{aligned} \quad (212)$$

Continuando con el procedimiento de análisis Lagrangiano, la preservación de $\Phi^{(3)\rho} \approx 0$ debería representar dos expresiones para las aceleraciones $\nabla_0^2 h_{0\sigma}$ y una para el último vínculo (cuya preservación, a su vez proporcione una relación más para las aceleraciones aún desconocidas, y así termine el procedimiento). Consideremos las

matrices 3×3 y 2×2 construidas con el objeto $\mathcal{N}^{\alpha\lambda}$, entonces el requerimiento anterior significa que la matriz $\mathcal{N}^{\alpha\lambda}$ tenga rango 2, de la forma

$$\det(\mathcal{N}^{\alpha\lambda}) = 0 , \quad (213)$$

$$\det(\mathcal{N}^{ij}) \neq 0 . \quad (214)$$

Por un lado, debido a la antisimetría de la matriz impar ($\mathcal{N}^{\alpha\lambda}$), la relación (213) es satisfecha idénticamente. Pero, la relación (214) significa una restricción sobre el posible campo gravitacional, y conduce a

$$\bar{\varepsilon}_{ij} \mathcal{N}^{ij} \neq 0 . \quad (215)$$

Puede mostrarse que esta restricción, la cual debe satisfacerse con la finalidad de mantener la consistencia en el número de grados de libertad podría contener soluciones no Einsteinianas. Por ejemplo, consideremos un espacio vacío no Einsteiniano con curvatura $R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{f(x)}{6} (g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})$. Entonces, la restricción (215) conduce a una relación diferencial parcial de primer orden para $f(x)$

$$6M^4 - m^2 f(x) + m\sigma\varepsilon^k_0 \partial_k f(x) \neq 0 , \quad (216)$$

con el parámetro $\sigma \equiv \frac{2}{3} a - b$.

3.2) Teoría autodual en un espacio de dS/AdS

Aquí, nuestro interés estará enfocado en una solución particular de la clase $\partial_k f(x) = 0$, la cual está relacionada con las de tipo dS/AdS. Entonces, consideraremos un espacio-tiempo de curvatura constante, con constante cosmológica λ , que pudiese caracterizar a un espacio de dS ($\lambda > 0$) o AdS ($\lambda < 0$) via la ecuación de Einstein, $R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R - \lambda g_{\mu\nu} = 0$, donde los tensores de Riemann y Ricci, y la curvatura escalar en $2 + 1$ dimensiones están dados por

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = \frac{R}{6} (g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu}) , \quad R_{\mu\nu} = \frac{R}{3} g_{\mu\nu} , \quad R = -6\lambda , \quad (217)$$

respectivamente. Con esto, el tensor (205) es

$$\Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} = M^2 (g^{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} - g^{\sigma\beta} g^{\alpha\lambda}) , \quad (218)$$

donde $M^2 = m^2 + \sigma R$.

Como estamos considerando espacios de curvatura constante, y usando el tensor (218) podemos evaluar los objetos relevantes de la teoría. Por ejemplo, la acción (196) toma la forma

$$S_{ad\lambda}^{(2)} = \int \frac{d^3x}{2} \sqrt{-g} (m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu{}^\alpha \nabla_\nu h_{\lambda\alpha} - M^2 (h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2)) , \quad (219)$$

el objeto $\mathcal{B}^{\alpha 0\lambda}$ dado por (207), ahora es

$$\mathcal{B}^{\alpha 0\lambda} = -\frac{mR}{6} \varepsilon^{0\alpha\lambda} , \quad (220)$$

y con esto, de (209) escribimos

$$\mathcal{N}^{ij} \equiv \left(\frac{6M^4 - Rm^2}{6m} \right) \varepsilon^{ij} , \quad (221)$$

con lo cual, la relación de consistencia (215) es ahora

$$6M^4 - Rm^2 \equiv 6m^4 + (12\sigma - 1) Rm^2 + 6\sigma^2 R^2 \neq 0 . \quad (222)$$

Buscando una interpretación, se pudiera pensar esta última relación como una restricción para m^2 en términos del escalar de curvatura y el parámetro libre σ , queremos decir

$$m^2 \neq m_\pm^2 \equiv \frac{R}{12} (1 - 12\sigma \pm \sqrt{1 - 24\sigma}) . \quad (223)$$

Por lo tanto, los valores prohibidos de m son

R	σ	m prohibida
> 0 (AdS)	$\leq \frac{1}{24}$	m_\pm
< 0 (dS)	— — —	— — —

tabla 1

La existencia de valores prohibidos de masa con la finalidad de mantener la consistencia del número de grados de libertad es un hecho bien conocido en el contexto de las teorías de espines altos [4],[5]. Sin embargo, uno también podría hacer la interpretación de que (222) representa restricciones sobre los posibles valores de la curvatura (por tanto de la constante cosmológica), o sea $R \neq R_{\pm} \equiv \frac{m^2}{12\sigma^2} (1 - 12\sigma \pm \sqrt{1 - 24\sigma})$, para una masa dada.

Seguidamente, revisamos los vínculos lagrangianos, esta vez en espacios de dS/AdS. Los nueve vínculos primarios, ec.(198) son

$$\Phi^{(1)\mu\alpha} \equiv m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_{\nu} h_{\lambda}^{\alpha} + M^2 (g^{\mu\alpha} h - h^{\alpha\mu}) \approx 0 , \quad (224)$$

y los vínculos secundarios (199) los escribimos como

$$\Phi^{(2)\alpha} \approx M^2 (\nabla^{\alpha} h - \nabla_{\mu} h^{\alpha\mu}) + \frac{mR}{6} \varepsilon^{\alpha\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda} \approx 0 , \quad (225)$$

o también como $\Phi^{(2)\alpha} \approx \nabla_{\mu} \Phi^{(1)\mu\alpha} - \frac{M^2}{m} \varepsilon^{\alpha\sigma\lambda} \Phi^{(1)}_{\mu\alpha} = \left(\frac{m^2 R - 6M^4}{6m} \right) \varepsilon^{\alpha\sigma\lambda} h_{\sigma\lambda} \approx 0$, revelando la propiedad de simetría del campo autodual, en virtud de la restricción (222).

La preservación de $\Phi^{(2)\alpha} \approx 0$ provee tres nuevos vínculos

$$\Phi^{(3)\alpha} \approx \left(\frac{m^2 R - 6M^4}{6m} \right) \varepsilon^{\alpha\sigma\lambda} \nabla_0 h_{\sigma\lambda} \approx 0 , \quad (226)$$

y particularmente, el vínculo $\Phi^{(3)0} \approx 0$ es reescrito como

$$\Phi^{(3)0} \approx \nabla_{\mu} \Phi^{(2)\mu} + \left(\frac{6M^4 - m^2 R}{6m^2} \right) \Phi^{(1)\mu}_{\mu} = \frac{M^2}{3m^2} (6M^4 - m^2 R) h \approx 0 , \quad (227)$$

diciendo que el campo autodual no posee traza (obviamente si $M^2 \neq 0$ y $6M^4 - m^2 R \neq 0$). El último vínculo aparece de la preservación de $\Phi^{(3)0} \approx 0$, es decir

$$\Phi^{(4)} \equiv \nabla_0 \Phi^{(3)0} \approx \frac{M^2}{3m^2} (6M^4 - m^2 R) \nabla_0 h \approx 0 , \quad (228)$$

y expresa el hecho de la conservación de la traza nula.

Queremos notar que las propiedades de transversalidad y traza nula para una descripción consistente del campo autodual (como cualquier campo con espín), demandan la condición

$$M^2 \neq 0 , \quad (229)$$

como consecuencia de (225), (227) y (228). De otra forma, si tal condición se relaja (es decir, $M^2 = 0$), la transversalidad y la no traza de $h_{\mu\nu}$ no estarían aseguradas, y entonces el sistema de vínculos lagrangianos no proporcionaría el número correcto de grados de libertad, pudiendo haber propagación de espines bajos.

Entonces, estando garantizadas las propiedades de simetría, transversalidad y traza nula, podemos escribir la ecuación de segundo orden $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$, partiendo de (224)

$$\left(\square - \frac{M^4}{m^2} + \frac{R}{2}\right)h^{(s)Tt}_{\mu\nu} = 0 , \quad (230)$$

la cual es claramente hiperbólica-causal, debido a que la podemos reescribir de la forma

$$(\mathcal{M}^{\beta\sigma}_{\rho\alpha})^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu h^{(s)Tt}_{\beta\sigma} + \dots = 0 . \quad (231)$$

donde $(\mathcal{M}^{\beta\sigma}_{\rho\alpha})^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\delta^{\beta\sigma}_{\rho\alpha}$ y $\delta^{\beta\sigma}_{\rho\alpha} \equiv \frac{1}{2}(\delta^\beta_\rho\delta^\sigma_\alpha + \delta^\sigma_\rho\delta^\beta_\alpha)$. Entonces, sean n_μ las componentes de trivectores, definimos la matriz característica como

$$\mathcal{M}^{\beta\sigma}_{\rho\alpha}(n) = \delta^{\beta\sigma}_{\rho\alpha} n^2 , \quad (232)$$

y la ecuación característica es

$$\det(\mathcal{M}) = (n^2)^6 = 0 , \quad (233)$$

teniendo un vector nulo como solución.

Los espacios de dS/AdS son conformalmente planos y sus conos de luz son equivalentes a los de el espacio de Minkowski, pues ellos estan relacionados vía un mapa de Weyl. Seguido a esto podemos escribir la ecuación $n^2 = 0$ en un sistema localmente "plano-Weyl" a través de un mapa, usando el hecho de que la transformación conforme para la métrica es $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$ (Apéndices B y C), como sigue

$$-(n_0)^2 + n_i n_i = 0 , \quad (234)$$

la cual claramente describe una propagación hiperbólica ($n_0 \in \mathbb{R}$) y causal ($n^2 = 0$ implica que no hay trivectores tipo-tiempo).

Por otro lado, la tabla 1 de valores prohibidos de masa en dS/AdS debe ser extendida debido a la restricción (229)

R	σ	$m \text{ prohibida}$
$> 0 (AdS)$	$\leq \frac{1}{24}$	m_{\pm}
$> 0 (AdS)$	< 0	$\sqrt{-\sigma R}$
$< 0 (dS)$	> 0	$\sqrt{-\sigma R}$

tabla 2

Queremos notar que en el estudio de la teoría del campo autodual acoplado con gravedad, un hecho bien conocido es verificado: dentro del posible conjunto de soluciones, en las que corresponden a espacios de curvatura constante es respetado el número de grados de libertad y la causalidad. Sin embargo, y en contraste con otras clases de teorías que propagan espín 2 [11], la de tipo autodual no posee límite no masivo (de hecho, $m \neq 0$ es una condición necesaria), y más aún, la restricción $M^2 \neq 0$ es demandada para poderse garantizar la equivalencia entre el sistema de vínculos lagrangianos y la existencia de un campo (autodual) con propiedades de simetría, transversalidad, traza nula, provisto de una ecuación de movimiento hiperbólica-causal.

Hay otros aspectos del modelo autodual en dS/AdS, relacionados con la condición $M^2 \neq 0$. Por ejemplo, la acción (219) no posee invariancia conforme (Apéndice C), lo cual es esencialmente un reflejo de la restricción $M^2 \neq 0$, ya que la traza del tensor momento-energía del campo autodual en la capa de masas es

$$T^\mu{}_\mu = -\frac{M^2}{2} h^{(s)Tt}{}_{\mu\nu} h^{(s)Tt\mu\nu} , \quad (235)$$

razón por la cual, además no sea posible mediante una transformación de Weyl, conseguir un marco local en el cual la propagación sea no masiva. Pero, si se persiste en mantener un término cuadrático en los campos al estilo Proca en la acción, no hay

una via consistente de "mejorar" el término lineal en masa, de la manera general en la que m^2 es reemplazada por $f(N)R$ (Apéndice C), donde $f(N)$ es una función de la dimensión.

Más aún, el valor crítico $M^2 = 0$ revela la existencia de una discontinuidad en la teoría autodual. Por un lado, está la inconsistencia que ocurre en el sistema de vínculos Lagrangianos cuando es evaluado este límite, siendo esto es una circunstancia no asociada al esquema de acoplamiento con el campo externo, sino una característica propia de los términos de autointeracción cuadráticos en los campos. Esto podría ilustrarse desde el punto de vista de la teoría plana, considerando la acción siguiente con dos parámetros

$$S_{m_1, m_2} = \int d^3x \left(\frac{m_1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^\alpha \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \frac{m_2^2}{2} (h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2) \right), \quad (236)$$

la cual contiene a la teoría autodual para el caso especial $m_1 = m_2$. En nuestra discusión, es suficiente notar que del procedimiento de construcción de la acción reducida de (236) (siguiendo el esquema presentado en la sección §2.2), se puede mostrar que tomando $m_2 = 0$, se obtiene una teoría que no propaga grados de libertad locales (de hecho la acción reducida es idénticamente nula). Pero si en cambio consideramos $m_2 \neq 0$ durante todo el procedimiento, se llega a la expresión esperada: $S_{m_1, m_2}^* = \int d^3x \{ P\dot{Q} - \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q(\Delta - \mathbb{M}^2)Q \}$, donde $\mathbb{M} \equiv \frac{m_2^2}{m_1}$, $P \equiv \sqrt{2}m_2\Delta h^{(s)TL}$ y $Q \equiv \sqrt{2}\frac{m_1}{m_2}\Delta h^{(s)TT}$ es una función singular en $m_2 = 0$, evidenciándose que la teoría no posee un límite bien definido en este punto crítico. De manera análoga, lo anterior se refleja en la acción para espacios de dS/AdS, (219) cuando $M^2 = 0$.

En síntesis, las restricciones (222) y (229),

$$6M^4 - Rm^2 \neq 0, \quad (237)$$

$$M^2 \neq 0, \quad (238)$$

con $M^2 = m^2 + \sigma R$, tienen información sobre el *background* y además coinciden en el límite plano con la condición de consistencia del modelo autodual: $m \neq 0$. Sin embargo, insistimos en distinguir las condiciones (237) y (238), pues hemos visto que

M^2 aparece como una "masa" al cuadrado en la acción (219), con lo que esta última podría pensarse como una versión curvilínea de la acción de dos parámetros plana, (236) (que contiene a la teoría autodual). La presencia de M^2 en la acción (219) garantiza la no invariancia conforme del modelo autodual y establece el carácter discontinuo o no de la teoría. Este comportamiento imita al término Lagrangiano en m^2 para el caso de la teoría plana.

3.2.1) Acción reducida

Si en el contexto de una teoría en un espacio-tiempo curvo se desea realizar un procedimiento para obtener la acción reducida correspondiente, siguiendo un programa similar al desarrollado en el caso plano, es posible encontrar serios obstáculos cuando se estudian espacios no Minkowskianos, incluidos los conformalmente planos.

Teniendo en mente la teoría autodual, podemos decir que, independientemente de lo extenuante que es el procedimiento de descomposición $2 + 1$ en un espacio curvo, lo cual apunta a colocar las componentes del campo autodual $h_{\mu\nu}$ en términos de una descomposición TL al estilo plano (si uno ensaya este camino) y en caso de poderse identificar las variables canónicas "Q" y "P" involucradas en la acción, nos encontramos finalmente con la dificultad de definir consistentemente potencias arbitrarias del D'Alembertiano en un espacio no-Minkowskiano (hecho relacionado con la imposibilidad de implementar una descripción de Fourier consistente [60]), que permiten expresar las componentes del campo autodual en función de las variables canónicas. A esta situación debemos agregar que, como consecuencia tampoco sea posible desarrollar un procedimiento con proyectores en las diferentes componentes de espín.

Sin embargo, como pasaremos a discutir de inmediato, es posible abordar cierto análisis que apunta a la descripción del grado de libertad propagado via la acción reducida, al menos en el contexto de espacios de curvatura constante.

Adicionalmente, requeriremos de un procedimiento que mantenga la covariancia

explícita de la teoría, evitando los inconvenientes adicionales que significa una descomposición $2 + 1$ curva. En este sentido, recurrimos a una descomposición Tt, al estilo plano.

Comenzamos por descomponer al campo autodual en sus partes simétrica y anti-simétrica

$$h_{\mu\nu} \equiv h^{(s)}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\lambda} V^\lambda , \quad (239)$$

que usando en la acción (219), nos proporciona

$$\begin{aligned} S_{ad\lambda}^{(2)} = \int d^3x \sqrt{-g} & \left(\frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} g^{\beta\alpha} h^{(s)}_{\mu\beta} \nabla_\nu h^{(s)}_{\sigma\alpha} - \frac{M^2}{2} (h^{(s)}_{\mu\nu} h^{(s)\mu\nu} - h^{(s)2}) + \right. \\ & \left. + m V^\mu (\nabla_\mu h^{(s)} - \nabla_\nu h^{(s)}_{\mu}{}^\nu) - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} V_\mu \nabla_\nu V_\sigma - M^2 V_\mu V^\mu \right) , \end{aligned} \quad (240)$$

cuyas ecuaciones de movimiento tienen un aspecto similar a las del caso plano

$$\begin{aligned} m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_\mu h^{(s)}_{\nu}{}^\alpha + m \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \nabla_\mu h^{(s)}_{\nu}{}^\lambda - 2M^2 h^{(s)\lambda\alpha} + 2M^2 g^{\lambda\alpha} h^{(s)} + \\ - 2m g^{\lambda\alpha} \nabla_\mu V^\mu + m (\nabla^\lambda V^\alpha + \nabla^\alpha V^\lambda) = 0 , \end{aligned} \quad (241)$$

$$m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_\mu V_\nu + 2M^2 V^\lambda - m \nabla^\lambda h^{(s)} + m \nabla_\mu h^{(s)\mu\lambda} = 0 . \quad (242)$$

La traza y la divergencia de (241) proporcionan

$$M^2 h^{(s)} - m \nabla_\mu V^\mu = 0 , \quad (243)$$

$$\begin{aligned} m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \nabla_\nu \bar{\mathcal{H}}_\lambda - 2M^2 \bar{\mathcal{H}}^\mu + 2M^2 \nabla^\mu h^{(s)} + m \square V^\mu + \\ - m \nabla^\mu \nabla_\alpha V^\alpha - \frac{mR}{3} V^\mu = 0 , \end{aligned} \quad (244)$$

donde $\bar{\mathcal{H}}_\lambda \equiv \nabla_\alpha h^{(s)}_{\lambda}{}^\alpha$. Usando la ecuación (244) en el rotacional de (242), se obtiene

$$(Rm^2 - 6M^4) V_\sigma = 0 , \quad (245)$$

que gracias a la restricción (222) significa $V_\sigma = 0$. Ésto, junto con (243) conduce a la relación suplementaria $h^{(s)} = 0$, y la ecuación de movimiento (242) asegura que

$\overline{\mathcal{H}}_\lambda \equiv \nabla_\alpha h^{(s)}_\lambda{}^\alpha = 0$. Así, como en el caso plano, de manera idéntica en los espacios de curvatura constante se describe un campo autodual simétrico-transverso-sin traza que propaga espín 2, y el espacio de fase reducido está descrito únicamente por $h^{(s)Tt}_{\mu\nu}$, obteniéndose la acción reducida de la forma

$$S_{sd\lambda}^{(2)*} = \int d^3x \sqrt{-g} \left(\frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\sigma} h^{(s)Tt}_\mu{}^\alpha \nabla_\nu h^{(s)Tt}_{\sigma\alpha} - \frac{M^2}{2} h^{(s)Tt}_{\mu\nu} h^{(s)Tt\mu\nu} \right), \quad (246)$$

que tiene un aspecto similar a la del caso plano. Gracias a la propiedad Tt, la ecuación de movimiento que se deriva de esta acción la podemos escribir como

$$m \varepsilon^{\sigma\mu\nu} \nabla_\mu h^{(s)Tt}_\nu{}^\beta - M^2 h^{(s)Tt\sigma\beta} = 0. \quad (247)$$

De esta ecuación concluimos que se trata de una propagación masiva, pues si actuamos sobre ella con $\varepsilon_{\sigma\alpha\rho} \nabla^\rho$ obtenemos la ecuación (230), es decir $(\square - \frac{M^4}{m^2} + \frac{R}{2}) h^{(s)Tt}_{\mu\nu} = 0$. En el espacio tangente, $T_p(M)$ con coordenadas locales planas ξ^a , esta última es

$$(\square_{(\xi)} - \frac{M^4}{m^2} + \frac{R}{2}) h^{(s)Tt}_{ab}(\xi) = 0. \quad (248)$$

Seguidamente, definimos localmente las partes "+" y "-" de $h^{(s)Tt}_{ab}(\xi)$ de la forma

$$h^{(s)Tt}_{ab}{}^\pm \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\delta^d_a \delta^c_b}{\mathcal{A}} \pm \delta^d_a \epsilon_b{}^{rc} \frac{\partial_r}{\square_{(\xi)}^{\frac{1}{2}}} \right) h^{(s)Tt}_{dc}, \quad (249)$$

donde $\mathcal{A} \equiv \sqrt{1 - \frac{Rm^2}{2M^4}}$. Con esto, en la capa de masas local (248) se obtiene

$$(\square_{(\xi)} - \frac{M^4}{m^2} + \frac{R}{2}) h^{(s)Tt}_{ab}{}^+(\xi) = 0, \quad (250)$$

$$h^{(s)Tt}_{ab}{}^-(\xi) = 0, \quad (251)$$

indicando que solo se propaga localmente $h^{(s)Tt}_{ab}{}^+$ ($h^{(s)Tt}_{ab}{}^-$), según el signo de la helicidad.

Es de observarse que la expresión (249) puede reescribirse como $h^{(s)Tt}_{ab}{}^\pm \equiv P^{\pm dc}_{ab} h^{(s)Tt}_{dc}$, donde

$$P^{\pm dc}_{ab} \equiv \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathcal{A}} (\delta^d_a \delta^c_b + \delta^c_a \delta^d_b) \pm (\delta^d_a \epsilon_b{}^{rc} + \delta^c_a \epsilon_b{}^{rd}) \frac{\partial_r}{\square_{(\xi)}^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (252)$$

no es un proyector, ya que $\mathcal{A} \neq 1$.

4) Formulaci3n $GL(N, R)$ de calibre de la gravedad

El problema relacionado con la construcci3n de una teor3a de calibre para la gravitaci3n abarca una considerable cantidad de aproximaciones. Partiendo con Utiyama [21], quien fuese uno de los primeros en reconocer el car3cter de "calibre" del campo gravitacional al presentar una formulaci3n para la gravedad basada en la visi3n del grupo homog3neo de Lorentz como grupo de calibre, pasando por construcciones en las que se relaja la propiedad de simetr3a de la conexi3n (p.ej.: espacio-tiempo de Riemann-Cartan) [30], incluso donde se remueve la condici3n m3trico-compatible o metricidad ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \neq 0$), arribando a teor3as basadas en geometr3as no-Riemannianas [61].

Con la finalidad de comparar y explorar la consistencia entre las soluciones de la teor3a de Einstein con las provenientes de una formulaci3n de calibre de la gravedad, enfocamos nuestra atenci3n en la construcci3n basada en un subgrupo af3n, $GL(N, R)$ [25],[38], la cual considera como campo de calibre a la conexi3n af3n. Obviamente, escoger este subgrupo produce limitaciones relacionadas con el contexto de teor3as supersim3tricas que demandan las simetr3as de translaci3n. Pero teniendo en mente la discusi3n de la consistencia bajo un dado esquema de acoplamiento con materia, es suficiente abordar la construcci3n de calibre $GL(N, R)$ en un espacio Riemanniano.

Abordaremos una densidad Lagrangiana de tipo Yang-Mills con el grupo de calibre $GL(N, R)$, que estar3 relacionada con una de tipo cuadr3tico en la curvatura de Riemann-Christoffel. Este tipo de lagrangianos poseen gran inter3s, debido a que, desde el punto de vista de la teor3a de campos est3ndar conducen a teor3as en las que los problemas de renormalizaci3n son menos severos [62]; desde el punto de vista de la teor3a de cuerdas, este tipo de t3rminos aparecen en el l3mite de bajas energ3as del Lagrangiano efectivo de gravedad (ver [63], por ejemplo).

El prop3sito principal es el de explorar un esquema covariante general (o invariante de calibre) para el acoplamiento no minimal con campos materiales en N dimensiones,

via la conexión de calibre $GL(N, R)$. Así, podremos estudiar la consistencia entre este tipo de teorías y la de Einstein. Como mostraremos, en el caso del vacío, el último requerimiento demanda que en el Lagrangiano se introduzca un término proporcional al cuadrado de la constante cosmológica.

Por otra parte, cuando los campos materiales son introducidos, se observa que la consistencia exigida produce restricciones sobre estos campos y los posibles valores de la constante cosmológica. Seguidamente, se encuentra que la introducción de términos Lagrangianos de acoplamiento asociados a campos auxiliares, permite remover las restricciones sobre los campos materiales [38]. Allí, y como escenario útil debido a sus propiedades geométricas particulares, abordaremos el caso $2 + 1$ dimensional.

Finalmente, en dimensión $2 + 1$ introducimos la formulación de calibre $GL(3, R)$ de la gravedad topológicamente masiva con constante cosmológica [64], observando su límite de torsión nula, el cual es consistente con la gravedad topológica masiva con constante cosmológica [65].

4.1) Teoría libre

Con la finalidad de motivar de una manera heurística la introducción de una formulación de calibre basada en el grupo de transformaciones generales de coordenadas de la Relatividad General, comenzamos por establecer algunos de los elementos formales desde el punto de vista geométrico-diferencial [66] de tal construcción.

Consideremos que nuestro espacio-tiempo N -dimensional es una variedad diferencial, M provista con métrica $g_{\mu\nu}$ de signatura Lorentziana, coordenadas curvas x^μ , y localmente planas ξ^a . En cada punto $p \in M$ se define un espacio tangente, $T_p(M)$ como aproximación lineal de M en una vecindad de p . Esto nos permite representar objetos tensoriales en M mediante tensores del espacio tangente.

Sean $V_\mu{}^a$, las componentes de un objeto tensorial mixto con índices curvo y plano local, que toman valores en la variedad, entonces introducimos la conexión de espín,

$\omega_{\mu b}{}^a$ y la afín, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ con las cuales se define la derivada covariante D_μ que actúa sobre objetos mixtos (apéndice B). De aquí, la condición de metricidad o condición métrico-compatible de la conexión afín ($\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$), la garantizaremos demandando la propiedad $D_\mu e_\nu{}^a = 0$, donde $e_\nu{}^a$ son los vielbeins que satisfacen $g_{\mu\nu} = e_\mu{}^a e_\nu{}^b \eta_{ab}$. De esto sigue que el tensor de torsión puede ser escrito como

$$T^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = e^\lambda{}_a (\partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + \omega_{\mu\nu}{}^a - \omega_{\nu\mu}{}^a) , \quad (253)$$

donde la notación es $\omega_{\mu\nu}{}^a \equiv e_\nu{}^b \omega_{\mu b}{}^a$, etc.

Si los elementos de matriz de $GL(N, R)$ y los de las transformaciones de Lorentz locales son denotados como $(U)^\alpha{}_\mu \equiv \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}$ y $(L)^a{}_b \equiv \frac{\partial \xi'^a}{\partial \xi^b}$, respectivamente, el comportamiento covariante de la derivada D_μ demanda las siguientes reglas de transformación para las conexiones

$$\omega'_\mu = L \omega_\mu L^{-1} + L \partial_\mu L^{-1} , \quad (254)$$

$$\mathbb{A}_a{}' = U \mathbb{A}_a U^{-1} + U \partial_a U^{-1} , \quad (255)$$

con la notación $(\mathbb{A}_a)^\mu{}_\nu \equiv e^\alpha{}_a (\mathbb{A}_\alpha)^\mu{}_\nu$, siendo

$$(\mathbb{A}_\alpha)^\mu{}_\nu \equiv \Gamma^\mu_{\alpha\nu} , \quad (256)$$

observándose que $(\mathbb{A}_a)^\mu{}_\nu$ se comporta como una conexión $GL(N, R)$ que transforma como un vector lorentziano (local) en el índice plano. Esto sugiere la idea de que subyace alguna estructura de fibrado construido a partir del espacio base M .

Para dilucidar esto, comencemos recordando que toda variedad N -dimensional diferenciable M (que también llamaremos variedad base), por definición está provista de una familia de cartas, $\{(U_n, \varphi_n)\}$ que la cubren. Aquí, U_n es una vecindad del punto $p_n \in M$ (tal que $\bigcup_{\text{todas los } n} U_n = M$) y φ_n es la función de coordenadas representadas por N funciones reales $\{x^0(p), x^1(p), \dots, x^{N-1}(p)\}$. El cubrimiento de M también puede ser enfocado desde el punto de vista de una colección de espacios tangentes definiendo la variedad

$$T(M) \equiv \bigcup_{p \in M} T_p(M) , \quad (257)$$

y cuya definición podemos especializar para una vecindad cualquiera de M

$$T(U_n) \equiv \bigcup_{p \in U_n} T_p(M) . \quad (258)$$

Los elementos de $T(U_n)$ estan caracterizados por un arreglo del tipo $(p, V(p))$ donde $V(p) = V^\mu(p) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in T_p(M)$ es un vector representado en la base del espacio tangente. Entonces, si observamos que la vecindad U_n es homeomórfica a un subconjunto de R^N y que cada $T_p(M)$ a R^N , se concluye que $T(U_n)$ puede ser identificado con $R^N \times R^N$.

Seguidamente, se introduce un mapa sobreyectivo llamado *proyección*, que manda puntos de $T(U_n)$ a U_n , $\pi : T(U_n) \longrightarrow U_n$. Esto indica que para cualquier punto $u \in T(U_n)$, $\pi(u)$ es un punto $p \in U_n$ en donde está definido un vector $V(p) \in T_p(M)$. Entonces, la *fibra* en el punto p se define como $F_p \equiv \pi^{-1}(p) = T_p(M)$, razón por la cual esta construcción recibe el nombre de *fibrado tangente*.

Es fundamental notar que la identificación de $T(U_n)$ con $R^N \times R^N$ nos dice que $T(M)$ posee esta estructura localmente. En el caso del fibrado trivial $T(M) = R^N \times R^N$ (o localmente en un caso no trivial), se puede ver que un elemento $V(p)$ del espacio tangente a un punto $p \in U_{mn} \equiv U_m \bigcup U_n$ posee simultáneamente dos representaciones relacionadas por

$$V'^\mu_{(x'_{(p)})} = (U)^\mu_{\nu(x_{(p)})} V^\nu_{(x_{(p)})} , \quad (259)$$

donde $(U)^\mu_{\nu}$ es un elemento no singular de $GL(N, R)$. Esto indica que los elementos de la fibra son transformados mediante $\mathcal{G} \equiv GL(N, R)$, el cual recibe el nombre de *grupo de estructura* del fibrado tangente, $T(M)$.

La construcción restante, es decir, el mapa de *trivialización local* que manda a $\pi^{-1}(U_n) \longrightarrow U_n \times F$ y las *funciones de transición*, $t_{mn} \in \mathcal{G}$, que relacionan dos elementos de la fibra en $p \in U_{mn}$ (esto es $f_m = t_{mn}(p)f_n$ con f_m y $f_n \in F_p$), seran asumidos como ya establecidos.

Dada la formulación del fibrado tangente, si mantenemos la variedad base, el grupo de estructura, \mathcal{G} y las funciones de transición, podemos reemplazar la fibra, $T_p(M)$ por

\mathcal{G} y obtener, así el *fibrado principal*, $P(E)$. Este tipo de fibrado, asociado a cualquier fibrado E juega un rol fundamental en el criterio que se usa para discernir la trivialidad o no de éste último. En nuestro caso, es bien sabido que el fibrado principal asociado a $E \equiv T(M)$ es el *fibrado de referenciales* (*frame bundle*), $P(E) = F(M)$, cuya fibra consiste en la colección ordenada de todas las bases del espacio tangente. Como un par de bases cualesquiera están conectadas por la acción del grupo $\mathcal{G} = GL(N, R)$, la fibra en cuestión es identificada con la variedad asociada a $GL(N, R)$.

Los términos *conexión* y *curvatura* están estrechamente vinculados. Cuando decimos que nuestra variedad M es curva nos referimos a que el espacio tangente cambia en la medida en que nos movemos de un punto a otro en la variedad. A la par de esto, la conexión se encarga de establecer un "puente" entre distintos espacios tangentes, y ésta es introducida formalmente cuando se realiza el transporte paralelo.

Desde el punto de vista de la estructura geométrica discutida, el transporte paralelo requiere que el espacio tangente $T_u(P)$ al fibrado principal $P(E) \equiv F(M)$, sea separado (suma directa) en un sub-espacio vertical y uno horizontal

$$T_u(P) = V_u(P) \oplus H_u(P) \quad , \quad u \in P(E) \quad , \quad (260)$$

con lo cual un campo vectorial bien definido en $P(E)$ puede ser descompuesto en sus partes pertenecientes a $V_u(P)$ y $H_u(P)$. Además es demandado que los subespacios $H_u(P)$ y $H_{u'}(P)$, con $u' = ug$, $g \in \mathcal{G}$, estén relacionados por un mapa lineal, asegurándose el transporte paralelo a lo largo de la fibra (todos los $H_{u'}(P)$ de una fibra quedan determinados por $H_u(P)$). Entonces, con todo esto y si la separación $T_u(P) = V_u(P) \oplus H_u(P)$ es única, y se dice que se ha definido una conexión.

Esta construcción geométrica es realizada mediante la introducción de una uno-forma de conexión, \mathcal{A}_n perteneciente al espacio cotangente ($T_p^*(P)$) en un punto p de U_n , y que toma valores en el álgebra del grupo \mathcal{G} (p.ej.: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu dx^\mu = \mathcal{A}^a_\mu t^a dx^\mu$ donde t^a son los generadores del grupo \mathcal{G}). Esta conexión local debe satisfacer la condición de compatibilidad $\mathcal{A}_n = t_{mn}^{-1} \mathcal{A}_m t_{mn} + t_{mn}^{-1} dt_{mn}$, en los puntos pertenecientes al solapamiento de las cartas $U_{mn} \equiv U_m \cup U_n$. Tal condición esencialmente encierra el

concepto de transformación de calibre, ya que escogiendo dos secciones locales, $\sigma_1(p)$ y $\sigma_2(p)$ (definidas por mapas de $p \in M$ en la fibra de $P(E)$) sobre una carta de M , y sabiendo que éstas están relacionadas mediante la acción del grupo de estructura ($\sigma_2(p) = \sigma_1(p)g(p)$, $g \in \mathcal{G}$), entonces las uno-forma de conexión locales, \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 se relacionan mediante (en componentes)

$$\mathcal{A}_{2\mu(p)} = g^{-1}_{(p)} \mathcal{A}_{1\mu(p)} g(p) + g^{-1}_{(p)} \partial_\mu g(p) \quad , \quad p \in U_1 \cup U_2 \quad , \quad (261)$$

que salvo un cambio de nomenclatura es la misma relación (255).

Queremos insistir en notar que, siguiendo la filosofía de Cartan y Palatini uno puede asumir una descripción en la que tanto la metricidad (estructura métrica asociada a la variedad), como el paralelismo (estructura afín) sean conceptos independientes, sin establecer a priori ninguna relación funcional entre la conexión y la métrica.

Siguiendo con la construcción de los objetos que necesitaremos para la formulación Lagrangiana, introducimos el tensor de curvatura de Riemann, $R^\alpha_{\sigma\mu\nu}$ a través de la aplicación del conmutador $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \equiv \nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu$ sobre algún tensor de rango 1 (Apéndice B), en donde pueden identificarse las formas del tensor de curvatura y torsión. Usando esta definición, las componentes del tensor de curvatura son reescritas como

$$R^\sigma_{\alpha\mu\nu} \equiv (\mathbb{F}_{\nu\mu})^\sigma_{\alpha} \quad , \quad (262)$$

donde

$$(\mathbb{F}_{\mu\nu})^\sigma_{\alpha} \equiv (\partial_\mu \mathbb{A}_\nu - \partial_\nu \mathbb{A}_\mu + [\mathbb{A}_\mu, \mathbb{A}_\nu])^\sigma_{\alpha} \quad , \quad (263)$$

son las componentes de la curvatura de tipo Yang-Mills.

4.1.1) Ecuaciones de campo

Con la finalidad de estudiar la relación entre las soluciones obtenidas de una formulación lagrangiana invariante de calibre construida con $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$, y las correspondientes a la gravedad de Einstein con constante cosmológica en un espacio sin torsión ($EG\lambda$),

consideraremos que las soluciones físicas del tensor de Ricci en el contexto de la $EG\lambda$, son las que satisfacen la ecuación de campo

$$R^{\alpha\beta} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2}R - \lambda g^{\alpha\beta} = -8\pi G T^{\alpha\beta} , \quad (264)$$

donde $T^{\alpha\beta}$ es el tensor momento-energía asociado a los campos materiales y λ la constante cosmológica.

Un primer paso será el de presentar el modelo libre (sin materia) con torsión no necesariamente nula. Así, sea la acción invariante de calibre para $T^{\alpha\beta} = 0$

$$S_o = \kappa^{4-N} \int d^N x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \Lambda(\lambda) \right) , \quad (265)$$

donde $\Lambda(\lambda)$ está relaciona con la constante cosmológica y κ tiene unidades de longitud (o simplemente decimos, $[\kappa] \sim l$). Obsérvese que la acción (265) coincide con una teoría Lagrangiana cuadrática del tensor de Riemann de la forma $S_o = \kappa^{4-N} \int d^N x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} R^{\alpha\beta\sigma\rho} R_{\alpha\beta\rho\sigma} + \Lambda(\lambda) \right)$.

La primer variación de S_o en la conexión, a menos de un término de borde es $\delta_{\mathbb{A}} S_o = \kappa^{4-N} \int d^N x \sqrt{-g} \text{tr} \mathbb{E}^\lambda \delta \mathbb{A}_\lambda$, con lo que la ecuación de movimiento es

$$\mathbb{E}^\lambda \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \mathbb{F}^{\mu\lambda}) + [\mathbb{F}^{\lambda\mu}, \mathbb{A}_\mu] = 0 , \quad (266)$$

y si variamos (265) respecto a los vielbeins (o la métrica) obtenemos

$$T_{\mu\nu}(\mathbb{F}) + \kappa^{4-N} \Lambda(\lambda) g_{\mu\nu} = 0 , \quad (267)$$

donde $T_{\mu\nu}(\mathbb{F}) = \kappa^{4-N} \text{tr} (\mathbb{F}_{\mu\beta} \mathbb{F}_\nu^\beta - \frac{g_{\mu\nu}}{4} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta})$, es el tensor momento-energía de Belinfante asociado a la curvatura $GL(N, R)$. La ecuación (267) nos dice, en términos generales que en esta formulación sin materia, la fuente de energía y momento gravitacional proviene de la constante cosmológica (via $\Lambda(\lambda)$), lo cual es una suerte de visión compartida con la formulación original de Hilbert-Einstein en el caso del vacío con constante cosmológica, pues en este caso, esta última podría ser vista como fuente de curvatura del espacio-tiempo.

En un espacio sin torsión, el miembro izquierdo de (266) se reduce a $\mathbb{E}^\lambda = \nabla_\mu \mathbb{F}^{\lambda\mu}$, el cual puede ser reescrito en términos del tensor de Ricci con la ayuda de las identidades de Bianchi, de la forma

$$(\mathbb{E}_\lambda)_{\sigma\alpha} = \nabla_\alpha R_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma R_{\lambda\alpha} . \quad (268)$$

Las soluciones triviales sin torsión para $\delta_A S_o = 0$ son las de tipo dS/AdS. Tomando la solución $R_{\alpha\beta} = -(2\lambda/(N-2))g_{\alpha\beta}$, la curvatura $\mathbb{F}_{\alpha\beta}$ puede ser evaluada usando (262), o sea

$$(\mathbb{F}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \frac{2\lambda}{(N-2)(N-1)} (\delta^\alpha{}_\nu g_{\beta\mu} - \delta^\alpha{}_\mu g_{\beta\nu}) , \quad (269)$$

y puede mostrarse por sustitución, que esta última satisface idénticamente a la ecuación (267) si

$$\Lambda(\lambda) = -\frac{2(N-4)}{(N-2)^2(N-1)} \lambda^2 . \quad (270)$$

En otras palabras, esta condición garantiza que los espacios de dS/AdS son soluciones triviales de la extremal de la acción S_o . Puede notarse que la constante Λ no distingue entre dS o AdS en este tipo de formulación Lagrangiana, en contraste con lo ocurrido en la de Hilbert-Einstein. Sin embargo, Λ establece otro tipo de clasificación. Cuando $N = 3$, Λ toma los valores $\lambda^2 \geq 0$, mientras que la constante cosmológica no aparece explícitamente en la acción para $N = 4$. Por otro lado, si $N > 4$ se tiene $\Lambda \leq 0$. Inmediatamente uno puede decir que el contenido físico de las clases de Λ está relacionado no solo con la curvatura del espacio-tiempo sino con una corrección del Hamiltoniano asociado.

En el análisis variacional que hemos asumido, consecuentemente hemos pensado en un principio de tipo Palatini (p.ej.: variaciones independientes de la conexión $GL(N, R)$ y los vielbeins o la métrica), pensando en la configuración general $T^\lambda{}_{\mu\nu} \neq 0$, para las variables definidas.

Ahora bien, debemos notar que el resultado obtenido puede recuperarse a partir de un procedimiento más general. Un punto de partida alternativo podría ser el de redefinir una nueva lagrangiana en la que se incluyan $\frac{N^2(N-1)}{2}$ vínculos sobre la

conexión, los cuales tienen la forma

$$\frac{1}{2} T^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [(\mathbb{A}_\mu)^\lambda{}_\nu - (\mathbb{A}_\nu)^\lambda{}_\mu] = 0 , \quad (271)$$

y los llamaremos "vínculos de torsión". Para esto, introducimos $\frac{N^2(N-1)}{2}$ multiplicadores de Lagrange, $\mathcal{C}_{\alpha\mu\nu}$ que satisfacen la condición de antisimetría

$$\mathcal{C}_{\alpha\mu\nu} = -\mathcal{C}_{\alpha\nu\mu} . \quad (272)$$

Con esto, la nueva acción con vínculos es

$$S'_o = S_o + \kappa^{1-N} \int d^N x \sqrt{-g} \mathcal{C}_\alpha{}^{\lambda\sigma} (\mathbb{A}_\lambda)^\alpha{}_\sigma . \quad (273)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a la conexión, evaluadas sobre los vínculos de torsión ahora tienen la forma, $\nabla_\mu (\mathbb{F}^{\lambda\mu})^\sigma{}_\alpha + \kappa^{-3} \mathcal{C}_\alpha{}^{\lambda\sigma} = 0$, que en términos del tensor de Ricci son reescritas como

$$\nabla_\alpha R_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma R_{\lambda\alpha} + \kappa^{-3} \mathcal{C}_{\alpha\lambda\sigma} = 0 . \quad (274)$$

Las variaciones en los vielbeins, evaluadas sobre los vínculos de torsión, siguen proporcionando (267). Los vínculos (271), junto con la condición de metricidad significan $(\mathbb{A}_\mu)_{\lambda\nu} \equiv \Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu})$.

Así, manipulando a (274), se obtienen los multiplicadores y una condición para la curvatura escalar, es decir

$$\mathcal{C}_{\alpha\lambda\sigma} = 0 , \quad (275)$$

$$R = \text{constante} . \quad (276)$$

Obsérvese que (275) indica que, al menos en el caso libre, el límite de torsión nula se puede obtener mediante la evaluación directa de las ecuaciones de campo con torsión, (266) y (267), tomando la conexión como los símbolos de Christoffel. En la sección § 4.3.3, mostraremos que éste no es el caso de la formulación de calibre de la gravedad

topológicamente masiva con constante cosmológica ya que, para obtener un límite de torsión nula consistente deben incluirse necesariamente los vínculos de torsión. La restricción sobre la curvatura, (276) significa una relación de consistencia con la solución de tipo dS/AdS de la gravedad de Einstein.

Más aún, aquí es importante notar que ésta construcción es consistente con la formulación original de Einstein, incluso concluyendo que en una variedad contractible sin constante cosmológica, la ecuación $\mathbb{F}_{\alpha\beta} = 0$ posee solución nula, en concordancia con el hecho bien conocido de que en tal caso la gravitación libre no propaga grados locales de libertad.

4.2) Acoplamiento con materia

Inspirados en un modelo de acoplamiento minimal, más un término de auto-interacción, como el caso del campo de Proca acoplado con una corriente: $S = \int d^N x \xi (-\frac{1}{4} f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} + j_\mu A^\mu + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu)$, aquí realizamos un primer ensayo de un esquema de acoplamiento con materia a través de la conexión \mathbb{A}_μ [38], como una extensión no abeliana de la idea mencionada. Así, exploraremos un posible esquema general y covariante bajo $GL(N, R)$, para el acoplamiento no minimal con campos materiales, de la forma

$$S = \kappa^{4-N} \int d^N x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \Lambda(\lambda) + \ell(g, \psi) + 4\pi G \text{tr} \mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi) \mathbb{F}_{\alpha\beta} \right), \quad (277)$$

donde el término invariante de calibre $\ell(g, \psi)$ y el tensor antisimétrico $\mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi) = -\mathbb{M}^{\beta\alpha}(g, \psi)$ dependen de la métrica y los campos materiales. De estas definiciones sigue que, después de una integración por partes de la acción S , pueden obtenerse un término tipo "corriente" (p.ej.: acoplamiento minimal) y un término de "masa" (p.ej.: acoplamiento de tipo Proca). Obviamente, nuestro problema es el de explorar la forma de los objetos $\ell(g, \psi)$ y $\mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi)$, requiriendo la consistencia con las soluciones de la gravedad de Einstein.

Aquí, siguiendo la idea de obtener un término de "masa" proponemos un acopla-

miento via la fuente de momento y energía de los campos materiales (que la tomaremos como el tensor momento-energía de Belinfante de éstos, $T_{\sigma\rho}$), es decir

$$(\mathbb{M}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = (N^{\alpha\beta\sigma\rho})^\mu{}_\nu T_{\sigma\rho} + (n^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu , \quad (278)$$

donde los objetos $N^{\alpha\beta\sigma\rho}$ y $n^{\alpha\beta}$ dependen solo de la métrica y pediremos que tengan las propiedades de simetría siguientes

$$(N^{\alpha\beta\sigma\rho})^\mu{}_\nu = -(N^{\beta\alpha\sigma\rho})^\mu{}_\nu = (N^{\alpha\beta\rho\sigma})^\mu{}_\nu , \quad (279)$$

$$(n^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = -(n^{\beta\alpha})^\mu{}_\nu , \quad (280)$$

Las formas generales de éstos, construidas con la métrica, y en consistencia con las propiedades de simetría esperadas son

$$\begin{aligned} (N^{\alpha\beta\sigma\rho})^\mu{}_\nu \equiv & c_1 (g^{\mu\alpha} \delta^\beta{}_\nu - g^{\mu\beta} \delta^\alpha{}_\nu) g^{\sigma\rho} + c_2 (g^{\rho\alpha} \delta^\beta{}_\nu - g^{\rho\beta} \delta^\alpha{}_\nu) g^{\sigma\mu} \\ & + c_3 (g^{\mu\alpha} g^{\rho\beta} - g^{\mu\beta} g^{\rho\alpha}) \delta^\sigma{}_\nu , \end{aligned} \quad (281)$$

$$(n^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \equiv a (g^{\mu\alpha} \delta^\beta{}_\nu - g^{\mu\beta} \delta^\alpha{}_\nu) , \quad (282)$$

siendo c_1 , c_2 , c_3 y a parámetros reales.

Como ilustración de esta primer aproximación del esquema de acoplamiento, consideraremos un sistema de campos materiales cuyo tensor momento-energía no depende explícitamente en la conexión, solo por simplicidad. Este tipo de sistemas se puede insertar dentro de una clase caracterizada por un tensor momento-energía, cuyo aspecto es de la forma

$$T_{\mu\nu} = (\alpha \delta^\lambda{}_\mu \delta^\rho{}_\nu + \beta g^{\lambda\rho} g_{\mu\nu}) \psi_{\lambda\rho} , \quad (283)$$

con α y β reales, y $\psi_{\lambda\rho}$ un tensor simétrico que contiene la información acerca de los campos materiales (tabla 3). El tensor (283) puede describir algunos sistemas interesantes, como los que mostramos a continuación

<i>Fuente</i>	$\psi_{\mu\nu}$	α	β
<i>campo escalar no masivo</i>	$\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$	1	$-\frac{1}{2}$
<i>fluido homogéneo</i>	$g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} U^\alpha U^\beta$	$p + \rho$	p
<i>campo electromagnético</i>	$g^{\lambda\rho} f_{\mu\lambda} f_{\nu\rho}$	1	$\frac{1}{4}$

tabla 3

En la tabla anterior, además del campo escalar real no masivo, hemos considerado un fluido homogéneo perfecto con densidad ρ , presión p y velocidad U^λ , y también un campo electromagnético con campo de Maxwell, $f_{\mu\nu} \equiv \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu$. Como es de observarse, en estos dos ultimos casos, los campos $\psi_{\mu\nu}$ tienen dependencia en la métrica, y en el de Maxwell, incluso en la conexión afín (si la torsión no es nula). De ahora en adelante estudiaremos el caso particular en que $\psi_{\mu\nu}$ no depende de la métrica (p. ej.: campo escalar real no masivo), sin modificar notablemente las generalidades de los resultados que discutiremos, al menos en relación con el caso de dependencia exclusiva en la métrica y campos materiales [67].

Así, realizando variaciones en la conexión de la acción S , se obtiene

$$\delta_{\mathbb{A}} S = \kappa^{4-N} \int d^N x \sqrt{-g} \operatorname{tr} \left[\mathbb{E}^\lambda - 8\pi G \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \mathbb{M}^{\lambda\mu}) + [\mathbb{M}^{\lambda\mu}, \mathbb{A}_\mu] \right) \right] \delta \mathbb{A}_\lambda , \quad (284)$$

a menos de un término de borde. Cuando las ecuaciones de movimiento provenientes de $\delta_A S = 0$ son escritas en un espacio-tiempo sin torsión, con la ayuda de (268), (278) y la condición de metricidad, se tiene

$$\begin{aligned} & \nabla_\nu (R^{\alpha\mu} - 8\pi G c_1 g^{\alpha\mu} T - 8\pi G c_2 T^{\alpha\mu} + c_4 \lambda g^{\alpha\mu}) + \\ & - \nabla^\mu (R^\alpha{}_\nu - 8\pi G c_1 \delta^\alpha{}_\nu T - 8\pi G c_3 T^\alpha{}_\nu + c_4 \lambda \delta^\alpha{}_\nu) + \\ & + 8\pi G (c_2 \delta^\alpha{}_\nu \nabla_\beta T^{\mu\beta} - c_3 g^{\alpha\mu} \nabla_\beta T^\beta{}_\nu) = 0 , \end{aligned} \quad (285)$$

donde hemos usado la libertad de introducir un término cosmológico con parámetro c_4 . La ecuación (285) dice que las soluciones de la gravedad de Einstein con constante cosmológica ($EG\lambda$) siguen siendo triviales (como ocurría con las de dS/AdS para el vacío, como nuestra condición de consistencia), si los parámetros toman los valores

$$c_4 = 2c_1 = \frac{2}{N-2} , \quad c_2 = c_3 = -1 , \quad (286)$$

pues con esto, los argumentos en las dos primeras derivadas covariantes en (285), son simplemente $R^{\alpha\beta} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2}R - \lambda g^{\alpha\beta} + 8\pi GT^{\alpha\beta}$, los cuales se anulan sobre las soluciones de la $EG\lambda$.

Así, sobre las soluciones de la $EG\lambda$, la ecuación (285) se reduce a

$$-\delta^\alpha_\nu \nabla_\beta T^{\mu\beta} + g^{\alpha\mu} \nabla_\beta T^\beta_\nu = 0 , \quad (287)$$

siendo ésta equivalente a demandar que $T^{\mu\nu}$ sea conservado

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (288)$$

La elección de los parámetros de acoplamiento, (286) (hecha en la referencia [38]) en busca de la consistencia con las soluciones de la $EG\lambda$, no es única. Esto puede mostrarse a partir de la inclusión de los vínculos de torsión, (271) en la acción (277), de manera que ahora se tiene

$$\begin{aligned} S' = \kappa^{4-N} \int d^N x \sqrt{-g} \Big(& -\frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \Lambda(\lambda) + \ell(g, \psi) \\ & + 4\pi G \text{tr} \mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi) \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \kappa^{-3} \mathcal{C}_\alpha{}^{\lambda\sigma} (\mathbb{A}_\lambda)^\alpha{}_\sigma \Big) . \end{aligned} \quad (289)$$

Esta nueva acción proporciona las ecuaciones de movimiento de la conexión, que pueden ser escritas en analogía al caso libre de materia, como

$$\nabla_\alpha \mathfrak{R}^{(2)}_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma \mathfrak{R}^{(3)}_{\lambda\alpha} + \nabla_\beta \Theta^\beta_{\lambda\alpha\sigma} + \kappa^{-3} \mathcal{C}_{\alpha\lambda\sigma} = 0 , \quad (290)$$

donde hemos definido los objetos

$$\mathfrak{R}^{(n)}_{\lambda\sigma} \equiv R_{\lambda\sigma} - 8\pi G c_1 T g_{\lambda\sigma} - 8\pi G c_n T_{\lambda\sigma} + c_4 \lambda g_{\lambda\sigma} , \quad n = 2, 3 , \quad (291)$$

con c_4 un parámetro libre y

$$\Theta_{\beta\alpha\nu\mu} \equiv 8\pi G (c_2 g_{\alpha\nu} T_{\mu\beta} - c_3 g_{\alpha\mu} T_{\nu\beta}) . \quad (292)$$

Manipulando la ecuación (290), tomando trazas y contracciones con el tensor de Levi-Civita, pueden obtenerse los multiplicadores, más ciertas restricciones sobre los parámetros de acoplamiento y la curvatura, como se muestra a continuación

$$\mathcal{C}_{\alpha\lambda\sigma} = 0 , \quad (293)$$

$$c_2 = c_3 , \quad (294)$$

$$\partial_\mu (-R + 16\pi G[(N-1)c_1 + c_2]T) + 16\pi G(N-2)c_2 \nabla_\alpha T^\alpha_\mu = 0 . \quad (295)$$

Si imponemos la condición de que el tensor momento-energía de los campos materiales sea conservado, ec. (288), la relación (295) se reduce a

$$R - 16\pi G[(N-1)c_1 + c_2]T = c , \quad (296)$$

con $c = \text{constante}$. Tomando la elección particular

$$(N-1)c_1 + c_2 = \frac{1}{N-2} , \quad (297)$$

$$c = -\frac{2N\lambda}{N-2} , \quad (298)$$

puede mostrarse que (296) coincide con la traza de las ecuaciones de Einstein, lo cual para nuestro interés constituye una relación de consistencia de la formulación de calibre. La fijación (286) es un caso particular de (297).

Existen más restricciones sobre los campos materiales, además de las que surgen al pedirse que éstos posean un tensor momento-energía conservado. Esta vez cuando las variaciones en los vielbeins o la métrica, son realizadas. Obviamente necesitamos decir algo sobre la forma de $\ell(g, \psi)$. Para esto demandaremos algunas propiedades. Por un lado, esta densidad Lagrangiana debe ser consistente con el límite de vacío material de la teoría, es decir $\ell(g, \psi) \rightarrow 0$ si α y β van a cero. Además, si la gravitación fuese "apagada", habremos de esperar que la acción de los campos materiales, $\int d^N x \sqrt{-g} \ell(g, \psi)$ se redujese a la acción estándar de éstos en un espacio-tiempo plano, que llamaremos $\int d^N \xi L(\psi)|_{\eta_{\mu\nu}}$, y cuya densidad Lagrangiana en un espacio curvo ya mostraremos. Sólo por cuestiones de nomenclatura esta situación la denominaremos como el *límite de no acoplamiento gravitacional*, y lo realizaremos tomando el límite $G \rightarrow 0$ y $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ con $\lambda = 0$.

Con esto en mente, y considerando que nuestra formulación es de tipo cuadrática en el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, proponemos una forma general,

tambi3n cuadr3tica para la contribuci3n de estos campos

$$\ell(g, \psi) \equiv L(\psi) + b_1 T^2 + b_2 T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = q + k \psi + b \psi^2, \quad (299)$$

donde hemos usado (283) y que la densidad Lagrangiana de los campos materiales en un espacio-tiempo curvo es $L(\psi) = k_{(\alpha,\beta)} \psi + q_{(\alpha,\beta)}$, donde los par3metros k y q dependen de cuales sean los campos que estemos considerando. En el caso del campo escalar real no masivo, mostrado en la tabla 3, 3stos par3metros son $k = -\frac{1}{2}$ y $q = 0$. Adem3s, $b = b_1(\alpha + N\beta)^2 + b_2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + N\beta^2)$ es otro par3metro real. M3s adelante examinaremos el l3mite de no acoplamiento gravitacional para el par3metro b , el cual demanda el valor $b \rightarrow 0$ para que $\ell(g, \psi) \rightarrow L(\psi)|_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}$.

La variaci3n de los vielbeins en la acci3n S puede escribirse en t3rminos del tensor de Ricci, Weyl y los campos materiales. Con esto, las ecuaciones de campo son

$$P^\sigma_d [\psi_{\alpha\beta}, e^\mu_a, R_{\alpha\beta}] + Q^\sigma_d [e^\mu_a, R_{\alpha\beta}] + S^\sigma_d [\psi_{\alpha\beta}, e^\mu_a, R_{\alpha\beta}, C_{\alpha\beta\mu\nu}] = 0, \quad (300)$$

donde P^σ_d y Q^σ_d son polinomios cuadr3ticos en $\psi_{\alpha\beta}$ y el tensor de Ricci, definidos por

$$\begin{aligned} P^\sigma_d \equiv & (b\psi^2 + k\psi + q)e^\sigma_d - 2k\psi^\sigma_d - 4b\psi\psi^\sigma_d + 16\pi G\alpha \frac{N-3}{N-2} R^{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}e^\sigma_d \\ & + 8\pi G\alpha \frac{8-3N}{N-2} (R_{\mu d}\psi^{\mu\sigma} + R^{\mu\sigma}\psi_{\mu d}) + 16\pi G\beta \frac{4-N}{N-2} R^\sigma_d \psi \\ & + 8\pi G \frac{(3-N)\alpha - (N-1)(4-N)\beta}{(N-2)(N-1)} R\psi e^\sigma_d \\ & + 16\pi G \frac{(N-2)\alpha + (N-1)(4-N)\beta}{(N-2)(N-1)} R\psi^\sigma_d, \end{aligned} \quad (301)$$

$$\begin{aligned} Q^\sigma_d \equiv & \frac{2(4-N)}{(N-2)^2} R^{\mu\sigma} R_{\mu d} - \frac{4-N}{(N-2)^2} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} e^\sigma_d - \frac{4}{(N-2)^2(N-1)} R R^\sigma_d \\ & - \frac{N-6}{2(N-2)^2(N-1)} R^2 e^\sigma_d - 8\pi G a R e^\sigma_d + 16\pi G a R^\sigma_d + \Lambda(\lambda) e^\sigma_d, \end{aligned} \quad (302)$$

y

$$\begin{aligned}
S^\sigma_d \equiv & C^{\mu\nu\lambda\sigma} C_{\mu\nu\lambda d} - \frac{e^\sigma_d}{4} C^{\mu\nu\lambda\rho} C_{\mu\nu\lambda\rho} - C^{\mu\nu\lambda\sigma} R_{\mu\nu\lambda d} - R^{\mu\nu\lambda\sigma} C_{\mu\nu\lambda d} \\
& + \frac{e^\sigma_d}{2} C^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} + 16\pi G\alpha C^{\sigma\mu\nu}_d \psi_{\mu\nu} ,
\end{aligned} \tag{303}$$

con $C_{\mu\nu\lambda\alpha}$ el tensor de Weyl.

En este punto, uno puede explorar el caso particular en el cual $N = 3$, debido a que allí el tensor de Weyl es idénticamente nulo y el tratamiento se aligera notablemente. Con esto, la ecuación de movimiento de los dreibeins es

$$\left(P^\sigma_d[\psi_{\alpha\beta}, e^\mu_a, R_{\alpha\beta}] + Q^\sigma_d[e^\mu_a, R_{\alpha\beta}] \right)_{N=3} = 0 . \tag{304}$$

Entonces, si se espera que la extremal de la acción S sea consistente con las ecuaciones de Einstein en un espacio sin torsión, necesitaremos evaluar (304) sobre éstas. Así, usando (283) en (264), escribimos

$$R_{\alpha\beta}(\psi) = -2\lambda g_{\alpha\beta} + 8\pi G(\alpha + 2\beta)\psi g_{\alpha\beta} - 8\pi G\alpha\psi_{\alpha\beta} , \tag{305}$$

con la cual evaluamos (304), obteniendo

$$\begin{aligned}
& (-4b + 4(8\pi G)^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2))\psi\psi^\sigma_d \\
& + (b - (8\pi G)^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2))\psi^2 e^\sigma_d \\
& - (2k + 16\pi G[3\lambda(\alpha + 2\beta) + 8\pi G\alpha a])\psi^\sigma_d \\
& + (k + 16\pi G[\lambda(\alpha + 2\beta) - 8\pi G\beta a])\psi e^\sigma_d \\
& + (q + 16\pi Ga\lambda)e^\sigma_d = 0 .
\end{aligned} \tag{306}$$

Si no se considera ningún tipo de restricción sobre los campos $\psi_{\alpha\beta}$, el término independiente de campos materiales en (306), por ejemplo significa una restricción sobre la constante cosmológica, esto es $\lambda = -\frac{q}{16\pi Ga}$. Pero, desde otro punto de vista,

de no esperarse ninguna obstrucción en los posibles valores de λ (a diferencia, por supuesto del caso del estudio dinámico de los campos de espines altos en interacción con un campo gravitacional, visto como un objeto externo), la ecuación (306) necesariamente representa una restricción para los campos materiales. Aquí imponemos una primer condición sobre las posibles configuraciones de los campos, es decir

$$\psi = \text{constante} , \quad (307)$$

pues obsérvese que la traza de (306) es un polinomio cuadrático en ψ , con coeficientes constantes. Eventualmente, el tipo de restricciones como la (307) no sería severa en el caso de un fluido perfecto (p.ej.: $\psi = U^\mu U_\mu = -1$). De todas formas, para todo ψ^σ_d con $\psi = \text{constante}$, la ecuación (306) proporciona un sistema de dos relaciones para a y b

$$2\psi b + (8\pi G)^2 \alpha a = 2(8\pi G)^2 (\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2) \psi - 24\pi G \lambda (\alpha + 2\beta) - k , \quad (308)$$

$$\psi^2 b + 16\pi G (\lambda - 8\pi G \beta \psi) a = (8\pi G)^2 (\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2) \psi^2 - (k + 16\pi G \lambda (\alpha + 2\beta)) \psi - q . \quad (309)$$

el cual posee soluciones regulares si se demanda que el determinante sea no singular, dando a lugar una nueva restricción

$$\psi(4\lambda - 8\pi G(\alpha + 4\beta)\psi) \neq 0 . \quad (310)$$

Ahora podemos estudiar el límite de no acoplamiento gravitacional para el parámetro b

$$b|_{\lambda=0} = (8\pi G)^2 \left(\frac{\alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 11\alpha\beta^2 + 12\beta^3}{\alpha + 4\beta} \right) - \frac{(\alpha + 2\beta)k\psi + q\alpha}{(\alpha + 4\beta)\psi^2} , \quad (311)$$

siendo consistente, por ejemplo en el caso de un campo escalar no masivo, donde $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$ y $q = 0$, pues $b|_{\lambda=0} = \frac{3}{4}(8\pi G)^2$.

Queremos subrayar que la ecuaciones (307) y (310) significan que el esquema de acoplamiento no minimal, presentado en (277) es consistente con la gravedad de

Einstein, solo bajo ciertas condiciones relacionadas con la clase de distribución de los campos materiales.

4.2.1) Inclusión de campos auxiliares

Las restricciones sobre los campos materiales, mencionadas en la sección anterior no son un aspecto sorprendente. De hecho, desde el punto de vista de campos de espines altos dinámicos, acoplados con gravedad como interacción externa, puede encontrarse que tal teoría solo es consistente en ciertos espacio-tiempos [1]-[11]. Así, ensayaremos la introducción de nuevos términos de interacción [38], hasta el orden cuadrático y que involucren campos auxiliares en la acción S , con la esperanza de reducir las restricciones sobre los campos materiales.

Cuando en el contexto de la electrodinámica masiva se estudia la acción de Proca, cuya densidad Lagrangiana es de la forma $\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu$, existe una forma de recuperar la invariancia de calibre mediante la incorporación de un campo escalar auxiliar de Stückelberg, $\omega(x)$ de manera que la versión invariante de calibre de la acción de Proca se consigue ahora con la nueva densidad definida como

$$\mathcal{L}_{P\omega} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} (A^\mu + \partial^\mu \omega)(A_\mu + \partial_\mu \omega) , \quad (312)$$

donde se demandanda que el campo vectorial transforme como $A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta$, y el escalar como $\omega \longrightarrow \omega' = \omega - \theta$, para garantizar que la acción $S_{P\omega} = \int d^4\xi \mathcal{L}_{P\omega}$ sea invariante de calibre.

Siguiendo esta idea, introduciremos una nueva acción, S' con las definiciones de \mathbb{J}^α y $\mathbb{H}^{\alpha\beta}$ como funcionales de la métrica y los campos materiales, y $(\mathbb{W}_\alpha)^\mu{}_\nu$ las componentes de un campo auxiliar que transforma como la conexión $GL(3, R)$, es

decir

$$\begin{aligned}
S' = \kappa \int d^3x \sqrt{-g} \Big(& -\frac{1}{4} \text{tr } \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \Lambda(\lambda) + \ell(g, \psi) + 4\pi G \text{tr } \mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi) \mathbb{F}_{\alpha\beta} \\
& + \text{tr } \mathbb{J}^\alpha (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) + \text{tr } \mathbb{H}^{\alpha\beta} (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) (\mathbb{A}_\beta - \mathbb{W}_\beta) \Big) .
\end{aligned} \tag{313}$$

La forma en como se acopla el campo auxiliar, garantiza por construcción la simetría de calibre, ya que la diferencia de dos conexiones sobre la fibra $GL(3, R)$, " $\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha$ " transforma según la representación adjunta del grupo. Esta idea ha sido manejada en otros contextos, como por ejemplo el estudio de la geometría singular del espacio de configuración en teorías de Yang-Mills, en donde es introducido el *calibre de fondo* [68].

Seguidamente ensayamos una propuesta simple para las componentes de \mathbb{J}^α y $\mathbb{H}^{\alpha\beta}$ en términos exclusivos de la métrica y los campos materiales

$$(\mathbb{J}_\beta)_{\mu\nu} \equiv (d_1 + d_2 \psi) \varepsilon_{\beta\mu\nu} , \tag{314}$$

$$(\mathbb{H}^{\alpha\beta})^{\mu\nu} \equiv a_1 g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + a_2 g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + a_3 g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} , \tag{315}$$

con los parámetros reales d_1 , d_2 , a_1 , a_2 y a_3 .

De la acción (313), se obtienen las ecuaciones de movimiento para \mathbb{W}_α

$$\mathbb{J}^\beta + \mathbb{H}^{\alpha\beta} (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) + (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) \mathbb{H}^{\beta\alpha} = 0 , \tag{316}$$

estableciendo que las ecuaciones de movimiento de la conexión \mathbb{A}_α se mantienen iguales a las obtenidas de (277) con $N = 3$, o sea sin los términos de campos auxiliares. La ecuación (316) sugiere además un ansatz para los campos auxiliares:

$$(\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha)_{\mu\nu} = (\theta_1 + \theta_2 \psi) \varepsilon_{\alpha\mu\nu} , \tag{317}$$

con θ_1 y θ_2 parámetros reales. Este ansatz, aún cuando no posea la dependencia más general posible en el campo $\psi_{\sigma\beta}$, es suficiente y consistente con la ecuación

(316). Sustituyendo el ansatz (317) en (316), se obtienen las siguientes relaciones entre parámetros

$$d_1 = 2(a_2 - a_1)\theta_1 , \quad (318)$$

$$d_2 = 2(a_2 - a_1)\theta_2 . \quad (319)$$

Si se quiere explorar el límite de torsión nula, se deben introducir los vínculos de torsión (271) en la acción (313), de manera que ahora escribimos

$$\begin{aligned} S'' = \kappa \int d^3x \sqrt{-g} \big(& -\frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \Lambda(\lambda) + \ell(g, \psi) + 4\pi G \text{tr} \mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi) \mathbb{F}_{\alpha\beta} \\ & + \text{tr} \mathbb{J}^\alpha (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) + \text{tr} \mathbb{H}^{\alpha\beta} (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) (\mathbb{A}_\beta - \mathbb{W}_\beta) + \kappa^{-3} \mathcal{C}_\alpha{}^{\mu\nu} (\mathbb{A}_\mu)^\alpha{}_\nu \big) . \end{aligned} \quad (320)$$

Las ecuaciones de movimiento de la conexión y los campos auxiliares, conducen nuevamente a las condiciones (293)-(295). Así, tomando la fijación particular (286) y que los campos materiales poseen un tensor momento-energía conservado, ec. (288), la ecuación de movimiento para los dreibeins provenientes de (320), es

$$\begin{aligned} P^\sigma{}_d [\psi_{\alpha\beta}, e^\mu{}_a, R_{\alpha\beta}] + Q^\sigma{}_d [e^\mu{}_a, R_{\alpha\beta}] + \text{tr} \mathbb{H}^{\alpha\beta} (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) (\mathbb{A}_\beta - \mathbb{W}_\beta) e^\sigma{}_d + \\ + \frac{1}{\sqrt{-g}} \text{tr} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathbb{J}^\beta}{\delta e_\sigma{}^d} (\mathbb{A}_\beta - \mathbb{W}_\beta) + \text{tr} \frac{\delta \mathbb{H}^{\alpha\beta}}{\delta e_\sigma{}^d} (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) (\mathbb{A}_\beta - \mathbb{W}_\beta) = 0 , \end{aligned} \quad (321)$$

que, evaluando sobre las ecuaciones de Einstein (con la ayuda de (305)) y usando (314), (315) y (317), puede encontrarse un sistema de ecuaciones para los parámetros libres, para todo $\psi_{\alpha\beta}$, es decir

$$16\pi G a \lambda + 6(a_2 - a_1)\theta_1^2 = -q , \quad (322)$$

$$2(8\pi G)^2 \beta a - 16\pi G(\alpha + 2\beta)\lambda = k , \quad (323)$$

$$(8\pi G)^2 \alpha a + 24\pi G(\alpha + 2\beta)\lambda = -k , \quad (324)$$

$$b = (8\pi G)^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2), \quad (325)$$

$$\theta_2 = 0. \quad (326)$$

La consistencia con el límite de no acoplamiento gravitacional para el parámetro b es verificada, ya que es proporcional a G^2 . En el caso de un campo escalar real no masivo, el sistema (322)-(326) es resoluble para los parámetros libres a , b , $(a_1 - a_2)\theta_1^2$ y θ_2 , y quedando el parámetro de acoplamiento a_3 libre. En cualquier otro caso (p. ej., $\alpha + 2\beta \neq 0$) ocurrirían restricciones sobre la constante cosmológica.

Debe notarse que, aún cuando los términos de acoplamiento presentados en (313), con (314) y (315), no poseen la forma más general posible, la idea de que las restricciones fuertes sobre los campos materiales $\psi_{\alpha\beta}$ puedan ser evitadas introduciendo campos auxiliares, ha sido dilucidada.

Si reunimos todas las relaciones de los parámetros involucrados en la introducción de los campos auxiliares en (313), para el caso particular del campo escalar real no masivo ($\alpha = 1$, $\beta = k = -\frac{1}{2}$ y $q = 0$), reescribimos las relaciones (318), (319), (322)-(326), como

$$d_1 = 2(a_2 - a_1)\theta_1, \quad (327)$$

$$d_2 = 0, \quad (328)$$

$$8\pi G a \lambda + 9(a_2 - a_1)\theta_1^2 = 0, \quad (329)$$

$$2(8\pi G)^2 a = 1, \quad (330)$$

$$b = \frac{3}{4}(8\pi G)^2, \quad (331)$$

$$\theta_2 = 0, \quad (332)$$

el cual es un sistema de seis ecuaciones para nueve parámetros, de los cuales siete (a , b , a_1 , a_2 , a_3 , d_1 y d_2) son de acoplamiento, siendo a_3 libre. Si fijamos por comodidad, $a_2 = a_3 = 0$, los términos de acoplamiento con campos auxiliares evaluados sobre estos parámetros adquieren cierta forma familiar

$$tr \mathbb{J}^\alpha (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) = d_1 \varepsilon^{\alpha\mu}{}_\nu (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha)^\nu{}_\mu, \quad (333)$$

$$tr \mathbb{H}^{\alpha\beta}(\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha)(\mathbb{A}_\beta - \mathbb{W}_\beta) = a_1 tr (\mathbb{A}_\mu - \mathbb{W}_\mu)(\mathbb{A}^\mu - \mathbb{W}^\mu) \ , \quad (334)$$

con una relación de restricción para los parámetros d_1 y a_1 , dada por

$$36\pi G d_1^2 = -\lambda a_1 \ . \quad (335)$$

Las relaciones (333) y (334), sugieren que en lugar de la acción (313), pudiésemos haber comenzado con otra, de una forma similar a la del modelo de Proca

$$\begin{aligned} S' = \kappa^{4-N} \int d^3x \sqrt{-g} \Big(& -\frac{1}{4} tr \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \Lambda(\lambda) + \ell(g, \psi) + 4\pi G tr \mathbb{M}^{\alpha\beta}(g, \psi) \mathbb{F}_{\alpha\beta} \\ & + tr \mathbb{J}^\alpha (\mathbb{A}_\alpha - \mathbb{W}_\alpha) + \frac{\mu^2}{2} tr (\mathbb{A}_\mu - \mathbb{W}_\mu)(\mathbb{A}^\mu - \mathbb{W}^\mu) \Big) \ , \end{aligned} \quad (336)$$

con

$$(\mathbb{J}^\alpha)^\mu{}_\nu = J_0 \varepsilon^{\alpha\mu}{}_\nu \ , \quad J_0 = \textit{constante} \ , \quad (337)$$

exhibiendo un término de acoplamiento minimal con una corriente idénticamente conservada, \mathbb{J}^α y otro cuadrático, al estilo de el de Proca con "masa" μ (obsérvese que, en virtud de (334) y (335), en espacios de dS se podría tener $\mu^2 < 0$).

4.3) La gravedad topológicamente masiva

La incorporación de términos masivos en teorías de gravedad ha sido implementada desde distintos puntos de vista. Una construcción posible es la de agregar a la acción de Hilbert-Einstein, S_{HE} un término de Fierz-Pauli [69], el cual es cuadrático en la fluctuación de la métrica $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$, es decir $S = S_{HE} + m^2 \int d^4x \sqrt{-g} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2)$. Otra vía posible es, la llamada gravedad topológica masiva [58] (GTM), en la que el término de Fierz-Pauli es reemplazado por uno de tipo Chern-Simons (CS) no abeliano, construido con los símbolos de Christoffel. Es bien sabido que en 2+1 dimensiones, tanto la acción de Hilbert-Einstein como la acción de CS no propagan grados de libertad por separado, pero al combinarlas en la GTM se obtiene una teoría que describe excitaciones masivas en 2+1.

Si se agrega un término de tipo cosmológico a la GTM, se tiene la gravedad topológica masiva con constante cosmológica [65] (GTM λ), cuya acción es de la forma

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} (R + \lambda) + \frac{1}{\kappa^2 \mu} S_{CS} , \quad (338)$$

donde S_{CS} es la acción de CS. En un espacio-tiempo Riemanniano, la extremal de la acción (338) respecto a variaciones en la métrica, conduce a la ecuación de movimiento

$$R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} R - \lambda g^{\mu\nu} + \frac{1}{\mu} C^{\mu\nu} = 0 , \quad (339)$$

donde

$$C^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\alpha\beta} \nabla_\alpha (R^\nu{}_\beta - \frac{1}{4} \delta^\nu{}_\beta R) , \quad (340)$$

es el tensor de Cotton. La traza de la ecuación (339) proporciona una condición de consistencia para el tensor de Ricci

$$R = -6\lambda . \quad (341)$$

Si se manipula (339) mediante contracciones con el tensor de Levi-Civita y tomando la divergencia, es posible escribir una ecuación de propagación masiva para el tensor

de Ricci, o sea

$$(\square - \mu^2) R_{\mu\nu} - R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + 3R^\alpha{}_\mu R_{\alpha\nu} + \frac{\mu^2}{3} R g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} R R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu} = 0 , \quad (342)$$

donde $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$.

A la expresión (339) la llamaremos la ecuación de la GTM λ , y será nuestra condición de consistencia con vistas a explorar la versión topológicamente masiva de la formulación $GL(3, R)$ de gravedad, lo cual será seguidamente abordado.

4.3.1) Formulación de calibre $GL(3, R)$ topológica masiva

El modelo libre consistente con la gravedad de Einstein en el límite de torsión nula, está representado por la acción invariante de calibre $GL(3, R)$

$$S_o^{(2+1)} = \kappa \int d^3x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \lambda^2 \right) , \quad (343)$$

donde λ es la constante cosmológica.

Existen otras formas, además de agregar una constante cosmológica, para obtener soluciones no planas de la gravitación en dimensión 2+1. En el contexto de la formulación de calibre discutida en este trabajo, se implementó un procedimiento (§4.2) que copia la idea del presentado en el estudio de la acción del modelo de Proca invariante de calibre, el cual es clásica y cuánticamente equivalente al modelo original (312) (por ejemplo ver la referencia [70]), y se extiende la idea de los campos de Stückelberg al caso no abeliano con la introducción de la conexión de fondo $GL(3, R)$ o campo auxiliar, \mathbb{W}_α .

No obstante, en esta sección estamos interesados en ensayar la introducción de un término de origen topológico. Entonces, el modelo de la formulación de calibre $GL(3, R)$ de la gravedad topológicamente masiva con constante cosmológica (CGTM λ), es introducido de la forma

$$S_{CGTM\lambda} = S_o^{(2+1)} + \frac{m\kappa}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr} \left(\mathbb{A}_\mu \partial_\nu \mathbb{A}_\lambda + \frac{2}{3} \mathbb{A}_\mu \mathbb{A}_\nu \mathbb{A}_\lambda \right) , \quad (344)$$

la cual, por construcción es invariante de calibre a menos de un término de borde proporcional al *winding number*, $W(U) \equiv -\frac{1}{3} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr} U^{-1} \partial_\mu U U^{-1} \partial_\nu U U^{-1} \partial_\lambda U$, con $U \in GL(3, R)$.

Siguiendo la idea de Palatini, consideramos variaciones independientes en la conexión \mathbb{A}_μ y los dreibeins e^μ_a (o la métrica) sobre la acción (344). La extremal de ésta conduce a las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \mathbb{F}^{\lambda\mu}) + [\mathbb{F}^{\mu\lambda}, \mathbb{A}_\mu] - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \mathbb{F}_{\mu\nu} = 0 , \quad (345)$$

$$T_{\mu\nu}(\mathbb{F}) + \kappa \lambda^2 g_{\mu\nu} = 0 . \quad (346)$$

Exploremos el límite de torsión nula. Para esto, recurrimos a los vínculos de torsión (271) y consideraremos que en dimensión $N = 3$, los multiplicadores de Lagrange $\mathcal{C}_{\alpha\mu\nu}$ con la propiedad de antisimetría (272), pueden ser reemplazados por otros de dos índices, $\mathcal{C}_{\alpha\mu}$. Entonces, la acción CGTML con vínculos es

$$S'_{CGTML} = S_{CGTML} + \kappa^{-2} \int d^3x \sqrt{-g} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\lambda\sigma} (\mathbb{A}_\lambda)^\alpha{}_\sigma . \quad (347)$$

Con esta acción, la ecuación de movimiento correspondiente a la conexión evaluada sobre los vínculos de torsión, es

$$\nabla_\mu (\mathbb{F}^{\lambda\mu})^\sigma{}_\alpha - \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (\mathbb{F}_{\mu\nu})^\sigma{}_\alpha + \kappa^{-3} \mathcal{C}_{\alpha\beta} \epsilon^{\beta\lambda\sigma} = 0 , \quad (348)$$

y escrita en términos del tensor de Ricci, es

$$\nabla_\mu R_{\sigma\lambda} - \nabla_\lambda R_{\sigma\mu} - m \epsilon^{\nu\rho}{}_\sigma (g_{\lambda\nu} R_{\mu\rho} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho} - \frac{R}{2} g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}) + \kappa^{-3} \mathcal{C}_{\mu\beta} \epsilon^\beta{}_{\sigma\lambda} = 0 . \quad (349)$$

La ecuación de los dreibeins evaluada sobre los vínculos de torsión sigue siendo, obviamente (346). Así, las ecuaciones (349) y (346) pueden ser vistas como un sistema de 9+6=15 ecuaciones para las 6 componentes del tensor de Ricci y los 9 multiplicadores de Lagrange.

Procediendo de forma similar al caso libre, usamos la ecuación de movimiento en términos del tensor de Ricci, (349) la manipulamos (tomando trazas y contrayendo

con el tensor de Levi-Civita) y obtenemos los multiplicadores y una condición para la curvatura escalar, o sea

$$\kappa^{-3} \mathcal{C}_{\mu\nu} = \frac{mR}{6} g_{\mu\nu} , \quad (350)$$

$$R = \text{constante} , \quad (351)$$

siendo esta última relación consistente con la GTM λ . Sustituyendo (350) en (348), obtenemos

$$\nabla_\mu \mathbb{F}^{\lambda\mu} - \frac{m}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \mathbb{F}_{\mu\nu} + \frac{mR}{6} \mathcal{E}^\lambda = 0 , \quad (352)$$

donde hemos definido el objeto matricial antisimétrico, \mathcal{E}^λ con componentes $(\mathcal{E}^\lambda)^\sigma_\alpha \equiv \varepsilon_\alpha^{\lambda\sigma}$. Equivalentemente, también podemos evaluar (349) en (350), de manera que

$$\nabla_\mu R_{\sigma\lambda} - \nabla_\lambda R_{\sigma\mu} - m \varepsilon^{\nu\rho}_\sigma (g_{\lambda\nu} R_{\mu\rho} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho} - \frac{2}{3} R g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho}) = 0 . \quad (353)$$

En (352) observamos un término dependiente en la curvatura escalar, que como veremos, existe una solución para (346) que expresa que tal término puede ser de origen cosmológico. Para confirmar esto, escribimos el tensor de Belinfante en función del tensor de Riemann, considerando la relación (262), es decir

$$T_{\mu\nu}(\mathbb{F}) = \kappa (R^\sigma_{\rho\mu\beta} R^\rho_{\sigma\nu}{}^\beta - \frac{g_{\mu\nu}}{4} R^\sigma_{\rho\alpha\beta} R^\rho_{\sigma}{}^{\alpha\beta}) , \quad (354)$$

y como el tensor de Riemann en 2+1 dimensiones está expresado en términos exclusivos del tensor de Ricci, mediante $R_{\lambda\mu\nu\rho} = g_{\lambda\nu} R_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\rho} + g_{\mu\rho} R_{\lambda\nu} - \frac{R}{2} (g_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} - g_{\lambda\rho} g_{\mu\nu})$, se puede hacer lo propio con $T_{\mu\nu}(\mathbb{F})$. Entonces, la ecuación de los dreibeins, (346) se reduce a

$$2R_{\sigma\mu} R^\sigma_\nu - 2RR_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} + \frac{3}{4} g_{\mu\nu} R^2 + g_{\mu\nu} \lambda^2 = 0 . \quad (355)$$

Podemos explorar soluciones de tipo curvatura escalar constante (condición de consistencia), y particularmente de la forma $R_{\mu\nu} = \frac{R}{3} g_{\mu\nu}$. Sustituyendo ésta en (355) se obtiene

$$R = \pm 6|\lambda| , \quad (356)$$

es decir se tienen soluciones de tipo dS/AdS, las cuales satisfacen idénticamente (como es de esperarse) a la ecuación de movimiento (353). Obsérvese que el caso particular $\lambda = 0$ conduce necesariamente a $R = 0$, lo cual es la condición de consistencia del tensor de Riemann en el contexto de la GTM [58].

Finalmente, comentaremos sobre dos aspectos interesantes del modelo de la formulación de calibre $GL(3, R)$ de la gravedad topológicamente masiva, los cuales están relacionados con la consistencia de la ecuación de movimiento (353) con la de la GTM λ , ec. (339), y por otro lado, la obtención de la ecuación de propagación masiva para el tensor de Ricci. Inmediatamente podemos ver que, contrayendo la ecuación (353) con el tensor de Levi-Civita, se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{3}R + \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu}{}^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}R_{\nu\beta} = 0 , \quad (357)$$

la cual es consistente con (339), si fijamos

$$m = \mu , \quad (358)$$

y a (351) como

$$R = -6\lambda . \quad (359)$$

Esta consistencia sugiere que, de haber soluciones no triviales, éstas deben propagar de una manera causal y masiva, como en GTM λ . En efecto, tomando la divergencia de (353), escribimos

$$(\square - m^2)R_{\mu\nu} - R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + 3R^{\alpha}{}_{\mu}R_{\alpha\nu} + \frac{m^2}{3}Rg_{\mu\nu} - \frac{3}{2}RR_{\mu\nu} + \frac{1}{2}R^2g_{\mu\nu} = 0 , \quad (360)$$

la cual es equivalente a la ecuación de propagación del tensor de Ricci en la GTM λ , (342), bajo (358) y (359).

5) Conclusiones

El procedimiento que conduce a la acción reducida de una teoría dada, ha resultado ser una herramienta muy útil con miras a no solo examinar los grados físicos de libertad que se propagan, sino hacia la obtención de los corchetes de Dirac via los de Poisson inducidos en la superficie de los vínculos, sin pasar por el extenuante procedimiento estándar del formalismo de Dirac.

En el contexto anterior, el proceso de reducción de la teoría autodual de espín 2 en dimensión 2+1 (Capítulo 2), se realizó mediante las descomposiciones transverso-longitudinal o transversal-sin traza, que en cualquier caso, se recupera la forma canónica esperada, correspondiente a una excitación masiva: $S_{ad}^{(2)*} = \int d^3x \{P\dot{Q} - \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q(\Delta - m^2)Q\}$. Es importante notar que aún cuando existe el procedimiento de descomposición covariante de los proyectores, éste no se ha implementado en toda su amplitud, pues teniendo en mente el problema de un espacio-tiempo curvo, es conocido el obstáculo que representa la imposibilidad de definir las potencias arbitrarias del D'Alembertiano.

La prueba directa de la consistencia de una teoría cuántica de campo relativista, pasa por la obtención explícita de los generadores \mathcal{P}^μ y $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ que deben satisfacer el álgebra de Poincaré. Estos generadores son calculados en términos de las variables canónicas fundamentales, Q y P , asociadas al único grado de libertad propagado. El espín aparece a través de una contribución singular infrarroja, cuando los generadores de *boosts* de Lorentz (\mathcal{J}^{i0}) son calculados. Sin embargo, esta singularidad es evitable mediante el procedimiento bien conocido de realizar un cambio de fase en los operadores creación-aniquilación y la fijación del parámetro de espín, $s = 2$.

A nivel del álgebra de Poincaré, la singularidad infrarroja se manifiesta a través de una "anomalía" (\mathcal{A}) en la misma, cuando se calcula el corchete de los *boosts* de Lorentz, $i[\mathcal{J}^{i0}, \mathcal{J}^{j0}] = \epsilon^{ij}(\mathcal{J} - \mathcal{A})$. Esto debe ser así, pues en algún momento debe reflejarse el hecho de que no se trata de un campo de espín 0. No obstante,

como ocurre con los generadores, la transformación de fase que permite remover la singularidad infrarroja de los *boosts*, aquí se encarga de eliminar la "anomalía", teniéndose como es de esperarse que $i[\overline{\mathcal{J}}^{i0}, \overline{\mathcal{J}}^{j0}] = \epsilon^{ij} \overline{\mathcal{J}}$, con la fijación $s = 2$. Es de insistirse en que la teoría autodual de espín 2, descrita por la acción $S_{ad}^{(2)} = \frac{m}{2} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^\alpha \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - m(h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2))$ es invariante relativista por construcción, razón por la cual la "anomalía" discutida es solo una expresión de la singularidad infrarroja y no de alguna inconsistencia intrínseca en el carácter covariante de la misma. En este sentido, queda por evaluarse el álgebra de Schwinger [71], lo cual para el caso de espín 2 resulta ser un proceso laborioso.

Seguidamente (Capítulo 3), extendimos la teoría autodual de espín 2 al caso de un espacio-tiempo curvo, introduciendo términos de acoplamiento no minimales con la gravedad en la acción:

$$S_{adg}^{(2)} = \int \frac{d^3x}{2} \sqrt{-g} [m \epsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu^\alpha \nabla_\nu h_{\lambda\alpha} + \Omega^{\alpha\beta\sigma\lambda} (R_{\mu\nu}, g_{\rho\omega}) h_{\alpha\beta} h_{\sigma\lambda}] .$$

Allí, mostramos que si se demanda la consistencia en el conteo de grados de libertad, en estrecha analogía con el caso plano, no solo aparecen restricciones sobre los parámetros libres (a_1, \dots, a_7) , sino sobre el mismo espacio-tiempo. Como ejemplo de esto último, los espacios de dS/AdS son un caso particular en los que tanto el número de grados de libertad es consistente, como la propagación es causal.

No obstante, ocurre un efecto (ya reportado en otros contextos [4],[5]) como lo es el de la existencia de valores prohibidos de la masa, con la finalidad de mantener una descripción consistente de un campo simétrico, transverso y sin traza. Ocurren dos tipos de valores prohibidos de masa. Por un lado, en el contexto de la teoría plana se tiene

$$m \neq 0 ,$$

el cual proviene del hecho de que el límite de masa cero del modelo autodual conduce a una teoría sin grados de libertad locales. Adicionalmente, la condición $m \neq 0$ hace que no haya una versión invariante conforme de la teoría autodual.

Por otro lado, en el contexto de los espacios de dS/AdS aparecen las restricciones

$$6M^4 - Rm^2 \neq 0 ,$$

$$M^2 \equiv m^2 + \sigma R \neq 0 ,$$

que pueden ser interpretadas como que el parámetros m del campo autodual en dS/AdS posee valores prohibidos. Estas restricciones deben ocurrir para que los vínculos Lagrangianos en estos tipos de espacio-tiempo, describan consistentemente un campo simétrico, transverso y sin traza, que propaga causalmente una sola excitación. Además, ambas restricciones tienen información del *background* y consistentemente equivalen a $m \neq 0$ en el límite plano. No obstante, la restricción $M^2 \neq 0$ en el modelo autodual acoplado con dS/AdS juega un rol más parecido a $m^2 \neq 0$ en la versión plana, pues además de mantener la no invariancia conforme, el valor crítico $M^2 = 0$ revela el carácter discontinuo de la teoría.

Es posible examinar el único grado de libertad descrito por la teoría, mediante una aproximación local del procedimiento de la acción reducida, en el cual se realiza una descomposición transverso-sin traza de la parte simétrica del campo autodual, y posteriormente se "proyecta" este campo en el espacio plano tangente en sus partes $h^{(s)Tt}_{ab}{}^{\pm}(\xi)$, correspondientes a la propagaciones de espín ± 2 .

En el Capítulo 4, revisamos una posible formulación de tipo Yang-Mills para la gravitación, basada en el fibrado de referenciales con espacio base un espacio-tiempo N -dimensional métrico compatible con torsión. Allí, mostramos que esta formulación libre es consistente con las soluciones de tipo dS/AdS, si la constante cosmológica contribuye de manera cuadrática en la acción. Esto significa, al menos a nivel clásico la equivalencia entre la formulación original de Einstein y una de tipo Yang-Mills.

Seguidamente, ensayamos un esquema covariante de acoplamiento no minimal con campos materiales, observándose que en general (esto es, sin imponer más condiciones sobre los campos materiales que la que significa pedir que el tensor momento-energía asociado a éstos, sea conservado) las ecuaciones de campo obtenidas son consistentes con las de Einstein si se imponen ciertas restricciones sobre la materia. Este hecho

pudiese sugerir la idea de que estamos viendo "la otra cara de la moneda", en el sentido de que en el Capítulo 3 se discutió cómo hay que restringir al campo gravitacional para que una teoría de espín alto sea consistente. Pero aquí, siendo la gravitación el objeto dinámico, deben restringirse la forma de los campos materiales vistos como fuentes.

No obstante, como discutimos en el escenario 2+1 dimensional, la introducción de campos auxiliares remueve las restricciones sobre los campos materiales. Quedarían por explorarse otros esquemas de acoplamiento donde se incluyan otras clases de campos (fluidos, campos electromagnéticos, etc.) que involucren dependencia en la métrica y la conexión, así como la incorporación de objetos extendidos como cuerdas. De igual manera, en el contexto de la teoría libre de materia podría emprenderse la búsqueda de soluciones de tipo monopolo, donde posiblemente las soluciones de tipo Schwarzschild fuesen modeladas por ansatz de tipo Wu-Yang como ocurre en el caso de las teorías de Yang-Mills con el grupo $SU(2)$ [72].

Por último, presentamos brevemente el modelo correspondiente a la formulación de calibre $GL(3, R)$ topológicamente masiva con constante cosmológica (CGTM λ), cuya acción es

$$S_{CGTM\lambda} = \kappa \int d^3x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} \text{tr} \mathbb{F}^{\alpha\beta} \mathbb{F}_{\alpha\beta} + \lambda^2 + \frac{m}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \text{tr} (\mathbb{A}_\mu \partial_\nu \mathbb{A}_\lambda + \frac{2}{3} \mathbb{A}_\mu \mathbb{A}_\nu \mathbb{A}_\lambda) \right) ,$$

con $(\mathbb{A}_\mu)^\alpha{}_\beta = \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$ y $(\mathbb{F}_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$. Allí observamos que el límite de torsión nula posee no solo soluciones (triviales) de tipo dS/AdS, sino que las soluciones no triviales son consistentes con las de la gravedad topológica masiva cosmológicamente extendida (GTM λ), dada por

$$S_{GTM\lambda} = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{-g} (R + \lambda) + \frac{1}{\kappa^2 \mu} S_{CS} ,$$

y que, por tanto la teoría posee propagaciones masivas y causales. En pocas pala-bras, esta consistencia dinámica entre una teoría de tipo lineal en la curvatura escalar con otra de tipo cuadrático en el tensor de Riemann-Christoffel, radica en que la forma en como las primeras derivadas del tensor de Ricci contribuyen en la ecuación de la

GTML (via el tensor de Cotton), es reproducida con el límite de torsión nula por la ecuación de campo de la CGTML, aquí expuesta. El estudio de la linealización de la CGTML, la obtención de las cargas conservadas a ésta, así como el de la construcción de un esquema consistente de acoplamiento con campos materiales, son tareas pendientes.

Finalizamos diciendo que, a diferencia de simplemente tratarse de una teoría de Yang-Mills con grupo de calibre $GL(3, R)$ más un término de tipo Chern-Simons y otro cosmológico, aquí es posible recuperar el límite de torsión nula, lo cual proporciona cierto grado de extensión conceptual con respecto a lo que sería, simplemente un caso no abeliano de la electrodinámica topológica masiva.

6) Apéndices

Apéndice A: Proyectores.

Los operadores de proyección [57] proyectan al campo $h_{\mu\nu}$ en sus diferentes partes irreducibles, y ellos constituyen una partición de la "unidad", como veremos.

Comenzamos con el caso de tensores de rango 1, introduciendo los operadores

$$\hat{\partial}^\mu \equiv \frac{\partial^\mu}{\square^{\frac{1}{2}}} , \quad (A,1)$$

que satisfacen

$$\hat{\partial}^\mu \hat{\partial}_\mu = 1 . \quad (A,2)$$

Puede entenderse como actúa $\hat{\partial}^\mu$ en el espacio de Fourier, si tomamos

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik^\nu x_\nu} \bar{\phi}(k) , \quad (A,3)$$

entonces

$$\hat{\partial}_\mu \phi(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ik^\nu x_\nu} \frac{k_\mu}{\sqrt{-k^\alpha k_\alpha}} \bar{\phi}(k) . \quad (A,4)$$

Seguidamente, introducimos el proyector transverso

$$P_\mu{}^\nu \equiv \delta_\mu{}^\nu - w_\mu{}^\nu . \quad (A,5)$$

donde $w_\mu{}^\nu \equiv \hat{\partial}_\mu \hat{\partial}^\nu$. El proyector $P_\mu{}^\nu$ mapea cualquier campo vectorial en su parte transversa

$$P_\mu{}^\nu V_\nu \equiv V^T{}_\mu \implies \hat{\partial}^\nu V^T{}_\nu = 0 . \quad (A,6)$$

Es bien conocido que la parte de espín 1 de un campo vectorial está contenida en su parte transversa $V^T{}_\nu$, la cual tiene dos posibles helicidades. Podemos proyectar $V^T{}_\nu$ sobre éstas con los proyectores $P_{\pm\mu}{}^\nu$, definidos como sigue

$$P_{\pm\mu}{}^\nu \equiv \frac{1}{2}(P_\mu{}^\nu \pm \xi_\mu{}^\nu) , \quad (A,7)$$

donde hemos introducido el operador

$$\xi_\mu^\nu \equiv \epsilon_\mu^{\lambda\nu} \widehat{\partial}_\lambda , \quad (A,8)$$

siendo la "raíz cuadrada" de P_μ^ν (ver (A.9b)) y es sensible bajo cambios de paridad. Así, los proyectores $P_{\pm\mu}^\nu$ también son paridad dependientes.

Los operadores P_μ^ν , $P_{\pm\mu}^\nu$ y ξ_μ^ν , verifican el álgebra

$$P_\mu^\nu P_\nu^\sigma = P_\mu^\sigma , \quad (A,9a)$$

$$\xi_\mu^\nu \xi_\nu^\sigma = P_\mu^\sigma , \quad (A,9b)$$

$$P_\mu^\nu \xi_\nu^\sigma = \xi_\mu^\nu P_\nu^\sigma = \xi_\mu^\sigma , \quad (A,9c)$$

$$P_{\pm\mu}^\nu P_\nu^\sigma = P_\mu^\nu P_{\pm\nu}^\sigma = P_{\pm\mu}^\sigma , \quad (A,9d)$$

$$P_{\pm\mu}^\nu \xi_\nu^\sigma = \xi_\mu^\nu P_{\pm\nu}^\sigma = \pm P_{\pm\mu}^\sigma . \quad (A,9e)$$

Entonces, la descomposición de la unidad para los campos vectoriales es

$$1_\mu^\nu = P_{+\mu}^\nu + P_{-\mu}^\nu + w_\mu^\nu , \quad (A,10)$$

donde w_μ^ν representa el proyector de la parte de espín 0.

Ahora veamos la prescripción para los proyectores de tensores de rango 2. Una descomposición simétrico-antisimétrico de la unidad, $1_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \equiv \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu$ es realizada

$$1 = S + A , \quad (A,11)$$

donde

$$S_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu) , \quad (A,12a)$$

$$A_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu) . \quad (A,12b)$$

La parte de espín 2 de $h_{\mu\nu}$ está en la componente simétrica, transversa y sin traza, $h^{Tt}_{\mu\nu}$ ($h^{Tt}_{\mu\nu} = h^{Tt}_{\nu\mu}$, $h^{Tt\mu}_{\mu} = 0$ y $\partial^\mu h^{Tt}_{\mu\nu} = 0$). La parte de espín 1 se encuentra tomando la divergencia sobre cualquier índice, y la de espín 0 a través de la traza o una doble divergencia. Así, $h_{\mu\nu}$ tiene nueve componentes, de las cuales extraemos seis con S y tres con A , quedando repartidas como

S: parte simétrica (6)
2 con espín 2
2 con espín 1
2 con espín 0

A: parte antisimétrica (3)
2 con espín 1
1 con espín 0

Entonces, para la parte simétrica, los proyectores que extraen las partes de espín 2, espín 1 y espín 0 de $h^{(s)}_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, son

$$P_S^2{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_\alpha{}^\mu P_\beta{}^\nu + P_\alpha{}^\nu P_\beta{}^\mu - P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu}) , \quad (A,13a)$$

$$P_S^1{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_\alpha{}^\mu w_\beta{}^\nu + P_\alpha{}^\nu w_\beta{}^\mu + P_\beta{}^\mu w_\alpha{}^\nu + P_\beta{}^\nu w_\alpha{}^\mu) , \quad (A,13b)$$

$$P_S^0{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu} , \quad (A,13c)$$

$$P_W^0{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = w_{\alpha\beta} w^{\mu\nu} , \quad (A,13d)$$

respectivamente. Puede observarse que P_S^2 es transverso y sin traza, como es requerido para una parte de espín 2. P_S^1 es una construcción simétrica donde una divergencia es tomada y luego es proyectada en la parte transversa. Para espín 0, el objeto P_W^0 toma una doble divergencia y P_S^0 está relacionado con la traza. Finalmente, (A.13) es la descomposición de S

$$S = P_S^2 + P_S^1 + P_S^0 + P_W^0 . \quad (A,14)$$

De una manera idéntica, se puede obtener la descomposición de A . Los proyectores de espín 1 y 0 son

$$P_E^1{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_\alpha{}^\mu w_\beta{}^\nu - P_\alpha{}^\nu w_\beta{}^\mu - P_\beta{}^\mu w_\alpha{}^\nu + P_\beta{}^\nu w_\alpha{}^\mu) , \quad (A,15a)$$

$$P_B^0{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_\alpha{}^\mu P_\beta{}^\nu - P_\alpha{}^\nu P_\beta{}^\mu) , \quad (A,15b)$$

y la unidad, $1 = S + A$ es escrita así

$$1 = P_S^2 + P_S^1 + P_S^0 + P_W^0 + P_E^1 + P_B^0 . \quad (A,16)$$

La proyección en cada parte de $h_{\mu\nu}$ puede particularizarse aún más si consideramos la helicidad debido a que cada componente de espín no nulo tiene dos helicidades posibles. De hecho, la traza de cualquier proyector de espín no nulo da 2, lo que corresponde a la dimensión del subespacio en que se proyecta. En particular, para la parte de espín 2 se reconocen sus dos partes

$$h^{Tt}{}_{\mu\nu}{}^\pm \equiv \frac{1}{2}(h^{Tt}{}_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}(\xi_\mu{}^\alpha \delta_\nu{}^\beta + \xi_\nu{}^\beta \delta_\mu{}^\alpha)h^{Tt}{}_{\alpha\beta}) . \quad (A,17)$$

Por lo tanto, se tiene

$$P_{\pm S}^2{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(P_{\pm\alpha}{}^\mu P_\beta{}^\nu + P_{\pm\alpha}{}^\nu P_\beta{}^\mu + P_{\pm\beta}{}^\mu P_\alpha{}^\nu + P_{\pm\beta}{}^\nu P_\alpha{}^\mu - P_{\alpha\beta} P^{\mu\nu}) , \quad (A,18)$$

y ya que $P_\mu{}^\nu = P_{+\mu}{}^\nu + P_{-\mu}{}^\nu$, se muestra

$$P_{\pm S}^1{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_{\pm\alpha}{}^\mu w_\beta{}^\nu + P_{\pm\alpha}{}^\nu w_\beta{}^\mu + P_{\pm\beta}{}^\mu w_\alpha{}^\nu + P_{\pm\beta}{}^\nu w_\alpha{}^\mu) , \quad (A,19a)$$

$$P_{\pm E}^1{}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(P_{\pm\alpha}{}^\mu w_\beta{}^\nu - P_{\pm\alpha}{}^\nu w_\beta{}^\mu - P_{\pm\beta}{}^\mu w_\alpha{}^\nu + P_{\pm\beta}{}^\nu w_\alpha{}^\mu) , \quad (A,19b)$$

y

$$P_S^2 = P_{+S}^2 + P_{-S}^2 , \quad (A,20a)$$

$$P_S^1 = P_{+S}^1 + P_{-S}^1 , \quad (A,20b)$$

$$P_E^1 = P_{+E}^1 + P_{-E}^1 . \quad (A,20c)$$

Así, en dimensión $2 + 1$ se tiene un proyector para cada parte irreducible de $h_{\mu\nu}$.

Apéndice B: Gravedad en 3D y espacios de dS/AdS.

Consideremos una variedad N -dimensional, M provista con métrica $g_{\mu\nu}$ y signatura Lorentziana $(-1, +1, \dots, +1)$. Además, a los puntos de la variedad le podremos asignar cartas con coordenadas curvilíneas x^μ y localmente planas ξ^a .

Mediante la introducción de la conexión afín $(\Gamma^\lambda_{\mu\nu})$ y la de espín $(\omega_{\mu b}^a)$, se define la derivada covariante de objetos mixtos, como sigue

$$D_\mu V_\nu^a = \partial_\mu V_\nu^a + \omega_{\mu b}^a V_\nu^b - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda^a, \quad (B,1a)$$

$$D_\mu V^{\nu a} = \partial_\mu V^{\nu a} + \omega_{\mu b}^a V^{\nu b} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^{\lambda a}, \quad (B,1b)$$

$$D_\mu V_{\nu a} = \partial_\mu V_{\nu a} - \omega_{\mu a}^b V_{\nu b} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_{\lambda a}, \quad (B,1c)$$

$$D_\mu V^\nu_a = \partial_\mu V^\nu_a - \omega_{\mu a}^b V^\nu_b + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda_a. \quad (B,1d)$$

En el caso de la derivación covariante sobre objetos con índices puramente curvilíneos usaremos el símbolo ∇_μ , indicando la no inclusión de la corrección de conexión de espín.

Seguidamente, el tensor de curvatura de Riemann $(R^\sigma_{\alpha\nu\mu})$ y el de torsión $(T^\lambda_{\mu\nu})$ pueden ser introducidos via

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\alpha \equiv -R^\sigma_{\alpha\nu\mu}V_\sigma - T^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda V_\alpha, \quad (B,2)$$

con el tensor de torsión dado por $T^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = e^\lambda_a(\partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\mu\nu}^a - \omega_{\nu\mu}^a)$. Para todo V^α , la relación (B,2) implica que el tensor de curvatura tiene la forma

$$R^\sigma_{\alpha\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \quad (B,3)$$

y el de Ricci viene dado por la contracción $R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}$.

Es bien conocido que el tensor de Riemann-Christoffel puede ser descompuesto en términos del tensor de Ricci, su contracción y el tensor conformal de Weyl $(C_{\lambda\mu\nu\sigma})$, como sigue

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{1}{N-2} (g_{\lambda\nu} R_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R_{\lambda\sigma} + g_{\mu\sigma} R_{\lambda\nu}) +$$

$$-\frac{R}{(N-1)(N-2)}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}) + C_{\lambda\mu\nu\sigma} . \quad (B,4)$$

Si enfocamos nuestro interés en 3D, donde el tensor de Weyl es idénticamente nulo, vemos que el tensor de curvatura queda expresado en términos exclusivos de el de Ricci y su contracción. Particularmente miraremos los espacios de dS ($\lambda > 0$) y AdS ($\lambda < 0$), los cuales están gobernados por la ecuación de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0 , \quad (B,5)$$

donde

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} R , \quad (B,6)$$

es el tensor de Einstein. Con esto, escribimos el tensor de curvatura en dS/AdS en 3D

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = \frac{R}{6}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\sigma} - g_{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}) , \quad (B,7)$$

con

$$R = -6\lambda . \quad (B,8)$$

Si nos restringimos a espacios sin torsión recuperamos la forma simétrica de la conexión afín (símbolos de Christoffel), es posible hallar una solución para la ecuación (B,5), pensando en una métrica estático-estacionaria en coordenadas "polares" de la forma $dS^2 = -e^{A(r)}dt^2 + e^{B(r)}dr^2 + r^2d\theta^2$, que al ser utilizada en la definición del tensor de Ricci, la ecuación (B,5) se traduce en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para la funciones $A(r)$ y $B(r)$. Imponiendo las condiciones de contorno adecuadas (como la del límite Minkowskiano cuando $\lambda \rightarrow 0$), se obtiene la forma

$$dS^2 = -(1 - \lambda r^2)dt^2 + \frac{1}{1 - \lambda r^2}dr^2 + r^2d\theta^2 . \quad (B,9)$$

Es bien conocido que esta métrica puede inducirse a partir de un hiperboloide embebido en un espacio-tiempo 3+1 dimensional. Particularmente, el hiperboloide de de Sitter es

$$-(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 = \frac{1}{\lambda} , \quad (B,10)$$

donde X^A con $A = 0, \dots, 3$ son las coordenadas del espacio-tiempo 3+1 al cual se le provee una métrica de tipo

$$dS^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2, \quad (B,11)$$

cuya signatura refleja el hecho de que el grupo isometrías en dS es isomorfo a $SO(3, 1)$.

Entonces, si se ensaya la transformación (consistente con (B,10))

$$X^3 \pm X^0 = f(r) e^{\pm\sqrt{\lambda}t}, \quad (B,12a)$$

$$X^1 = r \cos\theta, \quad (B,12b)$$

$$X^2 = r \sin\theta, \quad (B,12c)$$

donde $f(r) = \sqrt{\frac{1}{\lambda} - r^2}$, se puede mostrar fácilmente que partiendo de (B,11) se recupera la métrica (B,9). (En el caso de Anti de Sitter 2+1, la discusión parte considerando una métrica 3+1 de tipo $diag(-1, +1, +1, -1)$, ya que el grupo de simetrías en AdS es isomorfo a $SO(2, 2)$ en 3D).

Finalmente, es posible realizar una proyección estereográfica de las coordenadas X^A del hiperboloide con la cual es posible escribir la métrica en su forma conforme (p.ej.: $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu}$). Tal proyección puede establecerse como

$$X^\mu = \frac{x^\mu}{1 + \lambda x^2}, \quad (B,13a)$$

$$X^3 = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{1 + \lambda x^2}, \quad (B,13b)$$

donde x^μ son las coordenadas estereográficas y $x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$. Usando (B,13) reescribimos la métrica (B,11) como

$$dS^2 = \Omega^2(x) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (B,14)$$

con $\Omega^2(x) \equiv (1 + \lambda x^2)^{-1}$.

Apéndice C: Elementos de la geometría conformal.

C.1) Mapa de Weyl

Establecemos las transformaciones conformes de la métrica $g_{\mu\nu}$ y los campos ϕ_A , con A un índice múltiple como los mapas reales ($\Omega(x) \in R$) definidos por

$$g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad , \quad (C,1a)$$

$$g'^{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x) g^{\mu\nu} \quad , \quad (C,1b)$$

$$\sqrt{-g'} = \Omega^N(x) \sqrt{-g} \quad , \quad (C,1c)$$

$$\phi'_A = \Omega^W(x) \phi_A \quad , \quad (C,1d)$$

donde N es la dimensión del espacio y W es el "peso" del campo ϕ_A .

A partir de (C,1ab) se obtienen las reglas de transformación conforme de los símbolos de Christoffel y las contracciones del tensor de curvatura

$$\Gamma'^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \delta^{\rho}_{\nu} \partial_{\mu} \ln \Omega + \delta^{\rho}_{\mu} \partial_{\nu} \ln \Omega - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \partial_{\lambda} \ln \Omega \quad , \quad (C,2)$$

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu} = & R_{\mu\nu} + 2(2 - N) \Omega^{-2} \partial_{\mu} \Omega \partial_{\nu} \Omega + (N - 2) \Omega^{-1} \nabla_{\mu} \partial_{\nu} \Omega + \\ & + (N - 3) g_{\mu\nu} \Omega^{-2} \partial_{\lambda} \Omega \partial^{\lambda} \Omega + g_{\mu\nu} \Omega^{-1} \square \Omega \quad , \end{aligned} \quad (C,3)$$

$$R' = \Omega^{-2} R + 2(N - 1) \Omega^{-3} \square \Omega + (N - 1)(N - 4) \Omega^{-4} \partial_{\lambda} \Omega \partial^{\lambda} \Omega \quad . \quad (C,4)$$

Un método que permite formular la versión invariante conforme de una acción dada, es ilustrado por el procedimiento que generalmente es realizado en el caso del campos escalar real masivo, cuya acción original es

$$S(\phi, m) = -\frac{1}{2} \int d^N x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi + m^2 \phi^2) \quad . \quad (C,5)$$

Aquí, se realiza el cambio

$$m^2 \longrightarrow \zeta(N) R \quad , \quad (C,6)$$

donde es bien conocido que, para este caso, $\zeta(N)$ es una función de la dimensión

$$\zeta(N) = -\frac{1}{4} \left(\frac{N - 2}{N - 1} \right) \quad , \quad (C,7)$$

garantizándose la invariancia conforme de $S(\phi, \zeta(N)R)$ bajo (C,1) y (C,4), con $W = \frac{2-N}{2}$ en (C,1d).

C.2) El criterio de Polchinski [73]

Consideremos una acción tal que la densidad Lagrangiana depende de los campos, sus derivadas y la métrica del espacio-tiempo, de la forma

$$S = \int d^N x \sqrt{-g} \mathcal{L}(\phi_A, \partial\phi_A, g_{\mu\nu}) \quad . \quad (C,8)$$

Seguidamente realizamos una transformación conforme infinitesimal $\Omega(x) = 1 + \frac{\omega(x)}{2}$, con $|\omega(x)| \ll 1$, de manera que

$$\delta g_{\mu\nu} = \omega(x) g_{\mu\nu} \quad , \quad (C,9a)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -\omega(x) g^{\mu\nu} \quad , \quad (C,9b)$$

$$\delta\phi_A = \frac{W}{2} \omega(x) \phi_A \quad . \quad (C,9c)$$

Entonces si $E^A(\phi) = 0$ son las ecuaciones de movimiento de los campos, la variación conforme según (C,9) de la acción (C,8) es

$$\delta_\omega S = \frac{1}{2} \int d^N x \sqrt{-g} \omega(x) (T + W \phi_A E^A(\phi)) \quad , \quad (C,10)$$

donde T es la traza del tensor momento-energía de Belinfante asociado a los campos ϕ_A . De esto sigue que, para todo $\omega(x)$ infinitesimal, la acción (C,8) es invariante conforme si

$$T = -W \phi_A E^A(\phi) \quad , \quad (C,11)$$

lo cual equivale a decir que S es invariante conforme si el tensor de Belinfante posee traza nula sobre las ecuaciones de movimiento de los campos. Como ejemplo de esto, puede mostrarse que esta condición es satisfecha consistentemente en el caso del campo escalar real con acción $S(\phi, \zeta(N))$, ya que el tensor de Belinfante es proporcional a $2 - N + 4(1 - N)\zeta(N)$.

Otro caso que puede verificarse, y que da pie para nuestra discusión es el correspondiente al caso de la teoría de Chern-Simons abeliana. La acción de ésta teoría es

$$S_{CS} = \frac{m}{2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda \quad , \quad (C,12)$$

cuya invariancia conforme puede verificarse pensando en que el campo autodual posee peso conforme $W = 0$ u observando que el tensor de Belinfante de esta teoría es nulo.

Sin embargo, esta situación cambia cuando pensamos en una suerte de teoría de Chern-Simons abeliana "masiva", podemos pasar a un modelo de tipo autodual de espín 1, o sea

$$S_{ad} = -\frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} (m \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + m^2 g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu) \quad . \quad (C,13)$$

Para esta teoría, el tensor de Belinfante es

$$T^{\mu\nu} = m^2 (a^\mu a^\nu - \frac{g^{\mu\nu}}{2} a^\alpha a_\alpha) \quad , \quad (C,14)$$

y su traza (en la capa de masas)

$$T = -\frac{m^2}{2} a^\alpha a_\alpha \neq 0 \quad , \quad (C,15)$$

lo cual nos indica que tal teoría no posee invariancia conforme. Este hecho también podría notarse al verse que el peso conformal del campo autodual no está bien definido cuando se examinan los dos términos que constituyen la acción (C,13).

Contrastando con el caso de Chern-Simons puro abeliano, si se desea mantener un término cuadrático en los campos y buscar la invariancia conforme, entonces uno podría pensar en un posible camino a seguir como el de extender el cambio del tipo (C,6) a

$$m^2 \longrightarrow \kappa R \quad , \quad (C,16)$$

$$m \longrightarrow m_{(R)} \quad , \quad (C,17)$$

donde κ y $m_{(R)}$ son un parámetro y una función del escalar de curvatura, respectivamente. Con esto escribimos la acción

$$S(a_\mu, \kappa) = -\frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} (m_{(R)} \epsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + \kappa R g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu) \quad . \quad (C,18)$$

Entonces, realizando una transformación conforme infinitesimal de tipo (C,9) con $\phi_A \equiv a_\mu$, la acción (C,18) cambia como

$$\begin{aligned} \delta_\omega S(a_\mu, \kappa) = & -\frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} [(\delta m_{(R)} + W\omega m_{(R)}) \varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + \\ & + \kappa\omega(\square - (\frac{1}{2} - W)R)a^\mu a_\mu] \quad , \end{aligned} \quad (C,19)$$

y nos dice que la acción (C,18) es invariante conforme, para todo $a_\mu(x)$ y $\omega(x)$ si

$$\kappa = 0 \quad , \quad (C,20)$$

$$\delta m_{(R)} + W\omega m_{(R)} = 0 \quad . \quad (C,21)$$

La relación (C.20) indica que la invariancia conforme obliga la eliminación del término masivo cuadrático en los campos, reduciendo la acción a una parecida a la de "Chern-Simons" pero con un factor $m_{(R)}$. Mientras tanto, la relación (C,21) nos indica que en el caso de que el campo a_μ posea peso conforme cero, simplemente la función del escalar de Ricci se reduce a $m_{(R)} = \text{constante}$.

Pensando en el criterio de Polchinski, lo anterior se verifica cuando se calcula el tensor momento-energía de Belinfante asociado a a_μ , según la acción (C,18), y cuya traza sobre las ecuaciones de movimiento es proporcional al parámetro κ , indicando que la invariancia conforme demanda la extracción del término masivo cuadrático en los campos.

Si recordamos particularmente el caso autodual de espín 2 en dS/AdS, se puede mostrar que una discusión similar a lo anterior, ocurre entre el término lagrangiano de tipo "Chern-Simons", $m \varepsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu{}^\alpha \nabla_\nu h_{\lambda\alpha}$ y el de tipo masivo cuadrático, $M^2 (h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2)$ de la acción (219). Esto es así, ya que la traza del tensor de Belinfante sobre las ecuaciones de movimiento es proporcional a M^2 , lo que obliga nuevamente a eliminar el término cuadrático para recuperar la invariancia conforme.

Referencias

- [1] I. L. Buchbinder, D. M. Gitman, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin, *Phys. Lett.* **B466** (1999) 216.
- [2] M. J. Duff, C. N. Pope, K. S. Stelle, *Phys. Lett.* **B223** (1989) 386.
- [3] C. Aragone, S. Deser, *Il Nuovo Cim.* **3A** (1971) 709; *Il Nuovo Cim.* **57B** (1980) 33.
- [4] A. Higuchi, *Nuc. Phys.* **B282** (1987) 397; *Nuc. Phys.* **B325** (1989) 745; *Class. Q. Grav.* **6** (1989) 397.
- [5] I. Bengtsson, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 5805.
- [6] A. Hindawi, B.A. Ovrut, D. Waldram, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 5583.
- [7] S. M. Klishevich, *Class. Q. Grav.* **16** (1999) 2915.
- [8] E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev, *Nuc. Phys.* **B291** (1987) 141; M. A. Vasilev, *Phys. Lett.* **B243** (1990) 378.
- [9] M. A. Vasiliev, *Int. J. Mod. Phys.* **D5** (1996) 763.
- [10] C. Cutler, R. M. Wald, *Class. Q. Grav.* **4** (1987) 1267; R.M. Wald, *Class. Q. Grav.* **4** (1987) 1279.
- [11] I. L. Buchbinder, D. M. Gitman, V. D. Pershin, *Phys. Lett.* **B492** (2000) 161.
- [12] P. C. Argyres, C. R. Nappi, *Phys. Lett.* **B224** (1989) 89.
- [13] S. M. Klishevich, *Phys. Atom. Nuc.* **61** (1998) 1527
- [14] S. M. Klishevich, *Int. J. Mod. Phys.* **A15** (2000) 395.
- [15] M. Fierz, W. Pauli, *Proc. Royal Soc.* **A173** (1939) 211.

- [16] S. J. Chang, *Phys. Rev.* **161** (1967) 1308; L.P.S. Singh, C. R. Hagen, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 898.
- [17] G. Velo, D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **188** (1969) 2218; G. Velo, *Nuc. Phys.* **B43** (1972) 389.
- [18] D. Zwanziger, *Lecture Notes in Physics* **73** (1978) 143.
- [19] S. Deser, V. Pascalutsa, A. Waldron, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 105.
- [20] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag (1990).
- [21] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101** (1956) 1597.
- [22] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 212.
- [23] D. W. Sciama, *Rev. Mod. Phys.* **36** (1964) 463.
- [24] M. Carmeli, *Lett. Nuovo. Cim.* **4** (1970) 40 ; *J. Math. Phys.* **11** (1970) 2728.
- [25] F. Mansouri, L. N. Chang, *Phys. Rev.* **D13** 12 (1976) 3192.
- [26] K. I. Macrae, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 3737.
- [27] J. Kijowski, "On a purely affine formulation of General Relativity", Springer Lectures Notes in Math. **836** (1980) 88.
- [28] K. S. Stelle, P. C. West, *Phys. Rev.* **D21** (1980) 1466.
- [29] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 18 (1986) 2244.
- [30] P. Baekler, F. W. Hehl, E. W. Mielke, "Nonmetricity and torsion: Facts and fancies in gauge approaches to gravity", Proc. of the 4th Marcell Grossman Meeting on General Relativity, 277 (1986); F. Gronwald, F. W. Hehl, "On the gauge aspects of gravity", Proc. of the 14th Course of the School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity, Erice, Italy, May (1995).

- [31] A. Chamseddine, *Phys. Lett.* **B233** (1989) 291; *Nucl. Phys.* **B346** (1990) 213.
- [32] P. Peldan, *Nucl. Phys.* **B395** (1993) 239.
- [33] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 975.
- [34] J. Zanelli, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 490.
- [35] G. t. Ter-Kazarian, *Nuovo Cim.* **112B** (1997) 825.
- [36] F. Brandt, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 065025.
- [37] R. Gaitan, *Ciencia* **9** 3 (2001) 391 (gr-qc/ 0109079).
- [38] R. Gaitan, *Mod. Phys. Lett.* **A18** 25 (2003) 1753 (gr-qc/0201072).
- [39] C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.
- [40] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579.
- [41] A. Salam, J. C. Ward, *Phys. Lett.* **13** (1964) 168.
- [42] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **18** (1967) 587; **19** (1967) 1264.
- [43] G. V. Dunne, Lecture: *Aspects of Chern-Simons Theory*, Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 69: Topological Aspects of Low-dimensional Systems, Les Houches, France, 7-31 Jul 1998 (hep-th/9902115).
- [44] P.K. Townsend, K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 38, Addendum-ibid. **137B** (1984) 443.
- [45] D. Gross, R. D. Pisarki, L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 43.
- [46] R. B. Loughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 2677.
- [47] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B39** (1989) 9679.

- [48] S. Deser, R. Jackiw, *Phys. Lett.* **B139** (1984) 371.
- [49] P. J. Arias, A. Restuccia, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 241.
- [50] J. Stephany, *Phys. Lett.* **B390** (1997) 128.
- [51] C. Aragone, A. Khoudeir, *Quantum mechanics of Fundamental Systems 1*, Plenum Press NY (1988); *Phys. Lett.* **173B** (1986) 141.
- [52] P. J. Arias, R. Gaitan, " *Teoría Autodual de Espín 2 revisada*", Trabajo presentado en el IV Congreso de la Soc. Ven. de Física, Margarita, Nov. 2003. Aprobado para su publicación en la Revista Mexicana de Física (hep-th/0401107).
- [53] P. J. Arias, R. Gaitan, L. González, Artículo en preparación.
- [54] T. Maskawa, H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **56** 4 (1976) 1295.
- [55] C. Teitlboim, M. Henneaux, " *Quantization of Gauge Systems*", Princeton Univ. Press, NJ (1992).
- [56] S. Weinberg, " *The Quantum Theory of Fields*", Vol. I, Cambridge Univ. Press, USA (1996).
- [57] P. J. Arias, " *Spin 2 en dimensión 2+1* ", Tesis Doctoral, Universidad Simón Bolívar (1994) (gr-qc/9803083).
- [58] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Ann. of Phys.* **140** (1982) 372.
- [59] P. J. Arias, R. Gaitan, Artículo en preparación.
- [60] S. Deser, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **VII**, 2 (1967) 149.
- [61] R. W. Tucker, C. Wang, " *Non-Riemannian Gravitational Interactions*", Stefan-Banach Conference on Mathematical Physics, Warsaw, Poland (1996).
- [62] K.S. Stelle, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 953.

- [63] B. Zwiebach, *Phys. Lett.* **156B** (1985) 315.
- [64] R. Gaitan, H. Mavo, F. Vera, " *Términos Masivos en la Formulación de Calibre $GL(3, R)$ de la Gravedad* ", LIV Conv. Anual AsoVAC, V Cong. de Investigación Universidad de Carabobo (2004).
- [65] S. Deser, "Cosmological Topological Supergravity" in *Quantum Theory of Gravity* Ed S. M. Christensen, Adam Hilger, London (1984).
- [66] C. Nash, S. Sen, " *Topology and Geometry for Physicists* ", Academic Press, Inc. (1983); M. Nakahara, " *Geometry, Topology and Physics* ", IOP Publishing, USA (1996).
- [67] R. Gaitan, Artículo en preparación.
- [68] J. Fuchs, " *The Singularity Structure of the Yang-Mills Configuration Space* ", Talk given at *Workshop on Canonical and Quantum Gravity*, Banach Center, Warsaw, Poland, 24-31, May 1995.
- [69] M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12** (1939) 3; M. Fierz, W. Pauli, *Proc. Roy. Soc.* **173** (1939) 211.
- [70] J. Camacaro, R. Gaitan, L. Leal, *Mod. Phys. Lett.* **A12**, 39 (1997) 3081.
- [71] J. S. Schwinger, " *Particles, Sources and Fields* ", Vol. 1, Addison-Wesley (1969).
- [72] D. Singelton, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 5911.
- [73] J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B303** (1988) 226.